Programme de colle – MP 1

Séries de fonctions

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes b), c) et d) [1] ci-dessus.	Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

Ensembles dénombrables

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.	Démonstrations non exigibles.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	Démonstration non exigible.

Semaine prochaine : Familles sommables, convergence dominée.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Tout énoncé de théorème concernant les séries de fonctions avec **hypothèses très précises** (caractère bornée, continuité locale ou globale, intégrale sur un segment, primitive, classe $\mathscr{C}^k$, classe $\mathscr{C}^\infty$).
Implications entre les différents modes de convergence (simple, uniforme, absolue, normale).

(ii) Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$.

(iii) Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

(iv) **CCINP 14** :
- (a) Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
  Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
  Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- (b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
- (c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac12}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

1. Continuité, limite, intégration, dérivation des suites de fonctions. Voir colle 12.

(v) **CCINP 8** :
- (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
  - i. Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.
    Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
  - ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.
- (b) On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
  - i. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}f_n$.
  - ii. Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}f_n$.

(vi) **CCINP 15** : Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- (a) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
- (b) Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
- (c) La série de fonctions $\sum\dfrac{n^2}{n!}z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R\in\mathbb{R}_+^*$?

(vii) **CCINP 16** : On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\quad u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$.
- (a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
- (b) Calculer $S'(1)$.

(viii) **CCINP 17** : Soit $A\subset\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.
- (a) Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\right)$$

- (b) On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0;+\infty[,\ f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
  Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
  $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

(ix) **CCINP 18** : On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ u_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$.
- (a) Étudier la convergence simple de cette série.
  On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x\in D$.
- (b)
  - i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
  - ii. La fonction S est-elle continue sur D ?

(x) **CCINP 53** : On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

(a) i. Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

(b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.