CCP2017 - PSI
Un corrigé

Problème

Partie 1 : résultats préliminaires

1. Une intégration par partie (on dérive f et on primitive $\cos(nt)$ et on a bien deux fonctions de classe C^1 sur le segment)

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n}f(t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sin(nt)f'(t)\ dt$$

Le terme entre crochets est nuls. On majore l'autre grossièrement :

$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\ dt$$

Le majorant étant de limite nulle,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = 0$$

2. Par théorème fondamental appliqué à la fonction continue φ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la primitive cherchée est

$$\Phi\ :\ x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\ dt$$

φ étant 2π-périodique, $\int_x^{x+2\pi} \varphi(t)\ dt$ ne dépend pas de x et par hypothèse, sa valeur en 0 est nulle. On en déduit que Φ est aussi 2π-périodique.
Comme Φ est continue, elle est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$. Etant 2π-périodique, elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}$ (avec la même borne que sur $[0, 2\pi]$).
On peut alors utiliser une intégration par partie comme plus haut.

$$\int_a^b f(t)\varphi(nt)\ dt = \left[\frac{1}{n}f(t)\Phi(nt)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\Phi(nt)\ dt$$

En notant $M = \|\Phi\|_\infty$ (qui existe) on a alors

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi(nt)\ dt\right| \leq \frac{M}{n}(|f(a)| + |f(b)|) + \frac{M}{n}\int_a^b |f'(t)|\ dt$$

Là encore le majorant est de limite nulle et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\varphi(nt)\ dt = 0$$

3. On a

$$\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\ dt = \int_\alpha^\beta (h(t) - g(t))\varphi(nt)\ dt + \int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\ dt$$

On peut alors utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale

$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\ dt\right| \leq \int_\alpha^\beta |h(t) - g(t)|.|\varphi(nt)|\ dt + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\ dt\right|$$

Comme $|h-g|$ est majorée par ε sur $[\alpha, \beta]$, on en déduit alors que

$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\, dt\right| \leq \|\varphi\|_\infty |\beta-\alpha|\varepsilon + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\, dt\right|$$

Soit alors f continue sur $[a, b]$. On va montrer le résultat demandé en revenant à la définition des limites (comme nous y incite le début de la question). On se donne donc $\varepsilon > 0$. Par théorème de Weierstrass, on peut trouver une fonction polynomiale P telle que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$. La question précédente donne une constante M telle que

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi(nt)\, dt\right| \leq M|b-a|\varepsilon + \left|\int_a^b P(t)\varphi(nt)\, dt\right|$$

La question 2 montre que pour n assez grand, le second terme est en module plus petit que ε pour n assez grand. C'est à dire qu'il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\int_a^b f(t)\varphi(nt)\, dt\right| \leq (M|b-a|+1)\varepsilon$$

Comme $(M|b-a|+1)$ est une constante, on a donc prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\, dt = 0$$

Dans le cas où f n'est que continue par morceaux, il existe un nombre fini de morceaux $]\alpha, \beta[$ tels que f restreinte à $]\alpha, \beta[$ soit continue et prolongeable en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[\alpha, \beta]$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta \tilde{f}(t)\varphi(nt)\, dt = 0$$

Remplacer $\tilde{f}$ par f ne change pas l'intégrale. On obtient le résultat pour f sur $[a, b]$ en faisant la somme sur tous les morceaux.

4. On a $\sin^2(nt) = \frac{1}{2}(1-\cos(2nt))$ et donc

$$\int_a^b f(t)\sin^2(nt)\, dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\cos(2nt)\, dt$$

Comme $x \mapsto \cos(2x)$ est continue, 2π-périodique et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$, le second terme est de limite nulle avec ce qui précède et ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin^2(nt)\, dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\, dt$$

Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

5. $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ étant continue sur $[a, +\infty[$, le seul problème est celui au voisinage de $+\infty$. Comme F est bornée, on a $\frac{F(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison aux fonctions de Riemann, $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et finalement sur $[a, +\infty[$. A fortiori, on a existence de

$$\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, dt$$

$t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et le seul problème est donc celui au voisinage de $+\infty$. On revient ici à la définition de l'existence de l'intégrale (et on ne cherche pas à prouver l'intégrabilité).

Par intégration par parties (et comme F est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ par théorème fondamental)

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$

Comme F est bornée, le terme entre crochets admet une limite (nulle) quand $b \to +\infty$. On a vu en début de question que la seconde intégrale admet aussi une limite quand $b \to +\infty$. On a donc (existence et valeur)

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = -\frac{F(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$

6. $t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). Le seul problème est au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto \int_0^x \sin(t)\,dt = 1-\cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, on peut utiliser la question précédente pour justifier que l'intégrale existe au voisinage de ∞ et donc sur $\mathbb{R}^+$.
   Comme $t \mapsto 1-\cos(t)$ est une primitive de sin sur $\mathbb{R}^+$, une intégration par partie (on travaille sur un segment de $\mathbb{R}^{+*}$ où il n'y a pas de problème pour celle-ci) donne

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\quad \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$$

   Comme $1-\cos(t) = 2\sin^2(t)$, on a donc

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\quad \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\,dt$$

   Dans l'intégrale, on pose $u = t/2$ (changement de variable affine), on a alors

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\quad \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du$$

   Le membre de gauche admet une limite quand $a \to 0$ et quand $b \to +\infty$. Il en va de même du crochet (de limite nulle, en particulier car $1-\cos(t) \sim t^2/2$ au voisinage de 0) et en passant à la limite, on obtient l'existence de l'intégrale de $\sin^2(u)/u^2$ sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$$

7. On utilise le résultat de continuité des intégrales à paramètres.
   - H1 $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - H2 $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - H3 $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |f(t)e^{-xt}| \le |f(t)|$. Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Le théorème s'applique et indique que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
8. On doit maintenant utiliser le théorème de régularité.
   - H1 $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée k-ième $x \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$.
   - H2 $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   - H3
     - $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
     - $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ t \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
     - $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in [a,b],\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |(-t)^k f(t)e^{-xt}| \le |f(t)|t^k e^{-at}$. $t \mapsto t^k e^{-at}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de limite nulle en $+\infty$ (car $a > 0$) et donc bornée sur $\mathbb{R}^+$. Le majorant est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (puisque continu sur $\mathbb{R}^+$ et $O(f(t))$ au voisinage de $+\infty$, on n'a donc pas besoin du caractère borné de f).

Le théorème s'applique et indique que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{L}(f)^{(k)}\ :\ x \mapsto \int_0^{+\infty} (-t)^k f(t) e^{-xt}\, dt$$

Puis pour $x > 0$, $|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|f\|_\infty}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée via la caractérisation séquentielle, ce qui permet de conclure sans utiliser l'hypothèse f bornée. On se donne donc une suite (x_n) de réels positifs et de limite infinie. On pose alors $g_n\ :\ t \mapsto f(t)e^{-x_n t}$.

H1 $\forall n,\ g_n \in C^0(\mathbb{R}^+)$.

H2 $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g_n(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et la suite (g_n) est donc simplement convergente vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.

H3 $\forall n,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |g_n(t)| \leq |f(t)|$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que $\mathcal{L}(f)(x_n) \to 0$ et, par caractérisation séquentielle,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$$

9. (a) La fonction f proposée est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors utiliser ce qui précède. $\mathcal{L}(f)$ est ainsi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-xt}\, dt$$

On en déduit que

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)''(x) + \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} (t^2+1) f(t) e^{-xt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$$

(b) Soient α et β des fonctions de classe C^2 telles que $\alpha' \cos + \beta' \sin$. Posons alors $g = \alpha \cos + \beta \sin$. On a alors (avec l'hypothèse faite sur α, β)

$$g' = -\alpha \sin + \beta \cos,\ g'' = -\alpha \cos - \beta \sin - \alpha' \sin + \beta' \cos$$

et ainsi

$$g'' + g = -\alpha' \sin + \beta' \cos$$

Pour que α et β conviennent, il suffit donc que $\left\{ \begin{array}{l} \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0 \\ -\alpha'(x)\sin(x) + \beta'(x)\cos(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$. La résolution du système montre qu'il suffit que

$$\alpha'(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \beta'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

Si h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \int_1^x h(t)\, dt$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si, de plus, l'intégrale de h existe au voisinage de $+\infty$, on peut ajouter la constante $\int_1^{+\infty} h(t)\, dt$ (cela reste une primitive). $x \mapsto -\int_x^{+\infty} h(t)\, dt$ est ainsi aussi une primitive de h. On peut appliquer ceci avec $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ (on a prouvé l'existence de l'intégrale) et $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ (la preuve de l'existence est la même). On peut donc choisir

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt \quad \text{et} \quad \beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, dt$$

On peut donc choisir $f_1(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et $f_2(t) = -\frac{\cos(t)}{t}$.

(c) On a ainsi une solution particulière h définie par

$$h(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt$$

Le changement de variable affine $u = t - x$ donne

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x+u}\, du$$

(d) L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ est un plan affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$, c'est à dire par $\text{Vect}(\cos, \sin)$. On obtient l'ensemble des solutions en ajoutant la solution particulière trouvée. Comme $\mathcal{L}(f)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\exists a, b / \ \forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$

10. Soit $x > 0$. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On peut effetcuer une IPP pour obtenir

$$\forall a > 0,\ \int_0^a \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt = \left[-\frac{\cos(t)}{x+t} \right]_0^a - \int_0^a \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\, dt$$

On en déduit que

$$\forall a > 0,\ \left| \int_0^a \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt \right| \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right) + \int_0^a \frac{dt}{(x+t)^2} \leq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right)$$

Tous les termes admettent une limite quand $a \to +\infty$ et le passage à la limite donne

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt \right| \leq \frac{2}{x}$$

On conclut que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt = 0$$

Comme $\mathcal{L}(f)$ est aussi de limite nulle en $+\infty$, on en conclut que $a\cos + b\sin$ est de limite nulle en $+\infty$. En introduisant les suites $(2n\pi)$ et $(2n\pi + \pi/2)$, on en déduit que $a = b = 0$ et donc que

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$

11. Remarquons que

$$\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} = -\frac{x\sin(t)}{t(x+t)}$$

On en déduit que

$$\forall t \geq 1,\ \left| \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq |x| \frac{1}{t^2}$$

Le majorant étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut intégrer ! On obtient un majorant de limite nulle quand $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = 0$$

Par ailleurs, comme $\forall t,\ |\sin(t)| \leq |t|$ et comme toutes les intégrales existent (fonctions continues ou prolongeables par continuité),

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \frac{x}{x+t}\, dt = x\left(\ln(x+1) - \ln(x) \right)$$

et le majorant est de limite nulle quand $x \to 0$. Finalement,

$$\lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

12. On vient de voir que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ quand $x \to 0$. Mais $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0 et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Partie 3 : phénomène de Gibbs

13. S_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$S_n'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \cos((2k+1)x) = \frac{4}{\pi} \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k+1)x} \right)$$

Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$ alors $e^{2ix} \neq 1$ et (somme géométrique)

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k+1)x} = e^{ix} \frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}} = e^{i(n+1)x} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$$

On en déduit alors que

$$S_n'(x) = \frac{4}{\pi} \frac{\sin((n+1)x)\cos((n+1)x)}{\sin(x)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin(x)}$$

Le membre de gauche est continu en 0 et on peut donc intégrer cette égalité sur $[0,x]$ pour tout $x \in [0,\pi]$. Comme $S_n(0) = 0$, on obtient

$$\forall x \in [0,\pi],\ S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\, dt$$

14. On sait que

$$\forall t \in [0,1[,\ \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k$$

Ainsi, en intégrant sur $[0,1[$,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\, dt$$

n étant fixé, on découpe la somme en deux morceaux :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k}\, dt + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-t^2)^k\, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-t^2)^k\, dt$$

La somme est encore géométrique et on peut écrire cela sous la forme

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\, dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \int_0^1 t^{2n+2}\, dt = \frac{1}{2n+3} \to 0$$

et ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

15. On a $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$ et donc
$$S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$
On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
16. On a $\sin((2n+1)(\pi - x)) = \sin((2n+1)\pi - (2n+1)x) = \sin((2n+1)x)$. Il en ressort alors que
$$\forall x,\ S_n(\pi - x) = S_n(x)$$
On fixe maintenant $x \in]0, \pi/2]$. Comme $\frac{\sin(2(n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0, on peut utiliser la question 13 pour écrire que
$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \sin(2(n+1)t)\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t}\,dt$$
$t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0 (équivalent à $\frac{t^3}{6t^2} \to 0$). On peut alors utiliser la question 3 avec cette fonction de $\varphi\ :\ t \mapsto \sin(2t)$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \sin(2(n+1)t)\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)\,dt = 0$$
Par ailleurs, le changement de variable $u = 2(n+1)t$ donne
$$\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t}\,dt = \int_0^{2(n+1)x}\frac{\sin(u)}{u}\,du$$
Comme $x > 0$, cette quantité tend vers $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$ quand $n \to +\infty$ d'après la question 12.
En conclusion, on a
$$\forall x \in]0, \pi/2],\ \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$$
17. On vient de voir que $\forall x \in]0, \pi/2]$, $S_n(x) \to 1 = f(x)$.
Comme $f(\pi - x) = f(x)$ et $S_n(\pi - x) = S_n(x)$, la propriété reste vraie pour $x \in [\pi, 2, \pi[$.
On a aussi $S_n(0) = 0 \to 0 = f(0)$ et $S_n(\pi) = 0 \to 0 = f(\pi)$ et la propriété est finalement valable sur $[0, \pi]$.
Par imparité des S_n et de f, cette propriété est finalement valable sur $\mathbb{R}$. On a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ de (S_n).
18. On a immédiatement $\varphi_n(0) = 0 \to 0$.
Soit maintenant $x \in]0, \pi]$. On a $\sin(\frac{x}{2n}) \sim \frac{x}{2n}$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $\varphi_n(x) \to \frac{\sin(x)}{x} = \varphi(x)$.
On a montré que (φ_n) converge simplement sur $[0, \pi]$ vers φ.
19. Il est immédiat, par théorèmes d'opération, que φ est continue sur $]0, \pi/2]$. Comme $\sin(x) \sim_0 x$ on a aussi continuité en 0.
La question 22 donne
$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}}\frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,dt$$
Le changement de variable affine $u = 2(n+1)t$ donne
$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_{n+1}(u)\,du$$
On veut intervertir limite et intégrale et on pense au théorème de convergence dominée.

- (φ_{n+1}) est une suite de fonctions continue sur $[0,\pi]$ qui converge simplement sur $[0,\pi]$ vers φ qui est elle même continue sur $[0,\pi]$.
- La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $[0,\pi/2]$ qui est un segment. Cette fonction est donc bornée sur ce segment et atteint ses bornes. Ainsi, il existe un réel t_1 telles que
$$\forall t \in [0,\pi/2],\ m = \frac{\sin(t_1)}{t_1} \leq \frac{\sin(t)}{t}$$
Comme $m > 0$, on peut aussi écrire que
$$\forall t \in [0,\pi/2],\ 0 \leq \frac{t}{\sin(t)} \leq \frac{1}{m}$$
On va appliquer cela pour $x \in]0,\pi]$ et $n \geq 0$ à $t = \frac{x}{2(n+1)} \in [0,\pi/2]$ et le fait que pour $x \in]0,\pi]$, $0 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$:
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,\pi],\ |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{\sin(x)}{x}\frac{x/(2(n+1))}{\sin(x/(2(n+1)))} \leq \frac{1}{m}$$
Le majorant, qui est constant, est intégrable sur $]0,\pi]$.

Le théorème s'applique et donne
$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$
Comme $f(\pi/(2(n+1))) = 1 \to 1$, on a donc
$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

20. sin étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à tout ordre sur $[0,x]$ (les coefficients sont ceux du développement limité) et on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\sin^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$, on a alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sin x - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \frac{x^N}{N!}\left\|\sin^{(N)}\right\|_\infty \leqslant \frac{x^N}{N!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

21. Quand on intégre sur $[0,\pi]$, on est dans le cas simple où l'on peut intervertir somme et intégrale sur un segment [à rédiger : convergence normale] ceci donne
$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$
Avec la question 19, on a donc
$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$$
A nouveau, $f(\pi/(2(n+1))) = 1 \to 1$ et donc
$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

22. Posons $u_n = (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$. (u_n) est une suite alternée qui est de limite nulle (la série associé converge). De plus

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\pi^2(2n+1)}{(2n+3)^2(2n+2)} \leq \frac{\pi^2}{(2n+3)^2}$$

Pour $n \geq 1$, ce quotient est ≤ 1. La suite $(|u_n|)$ décroît donc à partir du rang 1. On en déduit que $\sum_{k \geq n} u_k$ est du signe de u_n pour $n \geq 1$. En particulier, pour $n = 4$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{3} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \geq 0$$

En particulier,

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1 \geq 2\sum_{n=0}^{3} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

Cette quantité est > 0.17, ce que je ne vérifie pas et on conclut.
En particulier

$$\|S_n - f\|_{\infty,]0, \pi/2[} \geq \left(S_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) - f \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) \right)$$

montre que $\|S_n - f\|_{\infty,]0, \pi/2[}$ n'est pas de limite nulle. On n'a donc pas de convergence uniforme sur $]0, \pi/2[$.