CCP 2015 - Filière MP

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \quad \mapsto e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ est continue sur $I =]0;+\infty[$ et se prolonge continûment en 0, donc elle est intégrable sur tout segment $[0, X]$ avec $X > 0$.
En outre, pour tout réel $p > 0$, la fonction positive $x \mapsto e^{-px}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ car elle est continue et

$$\forall X > 0, \qquad \int_0^X e^{-px} dx = \frac{1 - e^{-pX}}{p} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}.$$

Par combinaison linéaire, la fonction f_n est donc intégrable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx - 2\int_0^{+\infty} e^{-2nx} dx = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n} = 0.$$

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right)$ est donc convergente (puisque son terme général est nul), et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right) = 0.$$

II.2. Pour tout $x > 0$, les séries géométriques $\sum_{n \geq 1} e^{-nx}$ et $\sum_{n \geq 1} e^{-2nx}$ sont convergentes car leurs raisons e^{-x} et e^{-2x} appartiennent à $]0;1[$. Par combinaison linéaire, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2x})^n = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}.$$

Ceci montre que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur l'intervalle I vers la fonction

$$S : x \longmapsto \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

Etudions l'intégrabilité de S sur I. Tout d'abord, S est continue sur I, et se prolonge continûment en 0, donc S est intégrable sur tout segment $[0, X]$ avec $X > 0$. Ensuite :

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x},$$

et la fonction positive $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc S aussi. Ceci montre que S est intégrable sur I. Enfin, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^{+\infty} S(x) dx = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \lim_{X \to +\infty} \left[-\ln(1 + e^{-x}) \right]_0^X = \ln(2).$$

II.3. La série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \right)$ est divergente. En effet, si elle était convergente, alors on pourrait appliquer le théorème d'intégration terme à terme (car la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I), et on aurait alors

$$\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right) = 0,$$

ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.