Probabilités

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω.	On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application P définie sur $\mathscr{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ s'identifie, via la formule $$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.	
b) Propriétés élémentaires des probabilités	
Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$	
Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$	
Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.	Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes.	Notations $P_B(A)$, $P(A\|B)$.
Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.	

TABLE DES MATIÈRES

I ESPACE PROBABILISÉ

1 Tribu

Comme vu en première année dans le cades des probabilités finies, on appelle **univers**, noté en général Ω, l'ensemble des **issues** ou **résultats** ou **réalisations** d'une expérience aléatoire.

Commençons par rappeler quelques situations modèles dans le cadre des univers finis : tirage de p boules dans une urne en contenant n, numérotées de 1 à n.

Exemples

E 1 – **Tirages successifs, avec remise** : Dans ce cas, l'ordre est important, et il peut y avoir répétition. On peut choisir comme modèle de résultat un p-uplet (ou p-liste) d'éléments de $[\![1,n]\!]$.
On pose $\Omega = [\![1,n]\!]^p$, et alors $|\Omega| = n^p$.
Il s'agit aussi du nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments (à chaque tirage, on associe sa boule).

E 2 – **Tirages successifs, sans remise** : Dans ce cas, l'ordre est important, et il ne peut pas y avoir répétition. On peut choisir comme modèle de résultat un p-uplet d'éléments deux à deux distincts (ou p-arrangements) de $[\![1,n]\!]$.
On pose $\Omega = \mathscr{A}_p\left([\![1,n]\!]\right)$, et alors $|\Omega| = A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
Il s'agit aussi du nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments (à chaque tirage, on associe sa boule).

E 3 – **Tirage simultané** : Dans ce cas, l'ordre n'est pas important, et il ne peut pas y avoir répétition. On peut choisir comme modèle de résultat une partie à p éléments de $[\![1,n]\!]$ (ou p-combinaison).
On pose $\Omega = \mathscr{P}_p\left([\![1,n]\!]\right)$, et alors $|\Omega| = \binom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Rappelons également qu'une même expérience peut donner lieu à différents univers possible selon ce que l'on souhaite observer (par exemple : carte d'une main vs couleur seulement de la carte, ou bien résultat d'un dé vs parité de ce résultat, etc.)

C'est encore plus vrai pour des univers infinis : le cadre formel que l'on va se donner prévoit que certaines parties de l'univers Ω seulement soient « observables » (les événements), afin de définir une probabilité dans ce cadre plus général.

Remarque

Conformément aux habitudes probabilistes, on note, pour $A \subset \Omega$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ le complémentaire dans Ω de A. Cela n'a absolument rien à voir avec l'adhérence topologique, donc.

Définition : Tribu

Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$

(ii) **Stabilité par passage au complémentaire** : $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$

(iii) **Stabilité par réunion dénombrable** : Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de A, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

Les couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé **espace probabilisable**, et les éléments de $\mathscr{A}$ ses **événements**.

Exemples

E 1 – $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω (dite **discrète**)

E 2 – $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω (dite **grossière**)

E 3 – Si A est une partie non vide de Ω, distincte de Ω, la plus petite tribu sur Ω contenant A est $\left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$.

Le vocabulaire vu en première année reste valable :

- Si $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** (qui est bien un événement).
- L'événement $\varnothing$ est appelé **événement impossible**.
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Ne pas confondre issue/résultats/réalisation et événement !

D'après le programme officiel, *la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique* et *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme* : ils servent de cadre théorique mais, dans la pratique, on n'attend pas nécessairement de les préciser.

Propriété

Une tribu est stable par réunion finie, par intersection dénombrable, par intersection finie.
Ainsi dit, si $\mathscr{A}$ est une tribu sur ω,

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

(iii) $(A \in \mathscr{A}$ *et* $B \in \mathscr{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathscr{A})$

(iv) $(A \in \mathscr{A}$ *et* $B \in \mathscr{A}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathscr{A})$

(v) Si $(A_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une famille finie d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$

(vi) Si $(A_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une famille finie d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$

2 Probabilité

Définition : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathscr{A}$ telle que

(i) $\forall A \in \mathscr{A} \quad \mathbb{P}(A) \in [0,1]$

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) **σ-additivité** : Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints (incompatibles), $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (cette série étant bien convergente).

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B des événements.

(i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Plus généralement, $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n)$.

(iii) Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. *Si A et B sont quelconques,* $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(v) ***Croissance*** *: si $A \subset B$,* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Démonstration

Prendre des A_n vides. □

Remarque

Pour trois événements,

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Et plus généralement, **Formule de Poincaré** (HP) : pour toute famille $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{I\in\mathscr{P}_k(\llbracket 1,n\rrbracket)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \right) = \sum_{I\in\mathscr{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)} (-1)^{|I|-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).
\end{aligned}$$

qui peut se montrer par récurrence, par exemple.

Propriété

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, alors $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Démonstration

C'est immédiat si I est fini, et sinon, via une énumération de I, on se ramène à une somme sur $\mathbb{N}$ et à la σ-additivité. □

3 Cas très simple : univers fini

Si Ω est fini, on prend généralement $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, et la propriété de σ-additivité est équivalente à la propriété

Si A et B sont deux événements disjoints, alors $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$.

Propriété

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, $\mathbb{P}$ est entièrement définie par la donnée des $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_{\omega_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, qui forment une famille de réels positifs dont la somme vaut 1. Et, pour toute partie A de Ω,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Les probabilités des événements élémentaires déterminent donc P.

Démonstration

Comme en MPSI. □

4 Cas simple : univers dénombrable

Ici, on garde la propriété de σ-additivité, que l'on ne peut plus remplacer par la simple additivité
Ici encore, il n'y a pas d'obstacle à prendre la tribu « discrète », c'est-à-dire $\mathscr{P}(\Omega)$. On obtient :

Propriété

Soit Ω un ensemble dénombrable. Pour toute famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs sommable et de somme 1, il existe une unique probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

Cette probabilité vérifie

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Démonstration

Analyse-synthèse. C'est une conséquence de ce qui a été vu dans le chapitre sur la sommabilité (sommation par paquets). □

Donc, encore une fois, $\mathbb{P}$ est définie de manière unique par les probabilités des singletons. Pour un univers fini ou dénombrable, les tribus d'évènements n'ont donc pas grand intérêt.

5 Cas moins simple : univers non dénombrable

Dans le cas où l'univers est infini indénombrable c'est plus compliqué : on peut montrer que pour un tirage à pile ou face infini non dénombrable, modélisé par $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (non dénombrable par argument diagonal de Cantor), la seule valeur possible pour le probabilité d'un événement élémentaire est... 0.

Pourquoi ? Intuitivement, si la probabilité d'obtenir un pile est $p \in]0,1[$, alors la probabilité d'obtenir n piles de suite de va être $p^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$...

C'est donc moins simple, on en peut pas se contenter des événements élémentaires, mais complètement hors-programme.

6 Réunion croissante, intersection décroissante

Propriété : Continuité croissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A_n \subset A_{n+1}$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Remarque

Continuité car $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ est en quelque sorte la « limite » de la suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarquons aussi que $A_k = \bigcup\limits_{n=0}^{k} A_n$.

Démonstration

$\big(\mathbb{P}(A_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée donc convergente vers $\ell \in [0,1]$.

Or, on remarque, par croissance, que $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigsqcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$ en notant $A_{-1} = \varnothing$, donc par σ-additivité,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=-1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})) = \ell - 0$$

par croissance puis télescopage. □

Corollaire

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite quelconque d'événements, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{k} A_n\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Propriété : Continuité décroissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A_{n+1} \subset A_n$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Démonstration

Il suffit de passer au complémentaire. □

Corollaire

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite quelconque d'événements, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{k} A_n\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

7 Inégalité de Boole

Propriété

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite quelconque d'événements : Alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Remarque

Où, si la série à termes positifs $\sum P(A_n)$ diverge, on lira la formule $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant +\infty$, ce qui ne dit rien.
Si la série converge et a une somme $\geqslant 1$, le résultat ne dit rien non plus.

Démonstration

Par récurrence sur n, on montre facilement (comme en première année) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{k} A_n\right) \geqslant \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(A_n)$ et on conclut en faisant $k \to +\infty$ et en utilisant le corollaire de la continuité croissante. □

8 Négligeabilité

a Événements négligeables

Définition

On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

Remarque

L'événement impossible est négligeable.
Un événement négligeable n'est pas en général impossible.

Propriété

Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Démonstration

C'est la σ-additivité. □

Propriété

Si A et B sont deux événements tel que $A \subset B$, si B est négligeable, A l'est.

Démonstration

C'est la croissance. □

Exemple

Dans le jeu de Pile ou Face infini, l'événement « la pièce donne Pile un nombre fini de fois » est négligeable.

b Événements, propriétés presque sûr·e·s

Définition

Un événement A est **presque sûr**, ou **presque certain**, lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$, ce qui équivaut à dire que $\overline{A}$ est négligeable.

Une propriété est dite **presque sûre** lorsque l'ensemble des éléments de Ω qui ont cette propriété est un événement presque sûr.

II Conditionnement et indépendance

1 Conditionnement

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** par

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(*Se lit en général « $\mathbb{P}$ de A sachant B »*)

Remarque

⚠ Il n'y a toujours pas d'« événement conditionnel $A|B$ » (élément de $\mathscr{A}$) : ce n'est qu'une notation signifiant qu'on se place en observateur de l'événement A sachant que l'événement B est déjà réalisé.

Mais la notation $\mathbb{P}_B$ peut aussi être trompeuse, car c'est la même que celle de la loi d'une variable aléatoire.

Propriété

$\mathbb{P}_B : A \in \mathscr{A} \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Démonstration

Seule la σ-additivité demande un peu de travail, mais rien de bien sorcier : si les A_n sont deux à deux disjoints, les $A_n \cap B$ le sont et $\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)$ permet de l'obtenir sans encombre. □

2 Probabilités composées

Théorème : Formule des probabilités composées

Soit $n \geqslant 2$, $A_1, \dots, A_n$ *des événements de l'espace probabilisé fini* $(\Omega, \mathbb{P})$ *tels que* $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Remarque

À nouveau, cela correspond à notre intuition : on réalise A_1, puis A_2 sachant que A_1 l'est, puis A_3 sachant que A_1 et A_2 le sont, etc. On se sert donc en général de cette formule lorsque l'on a des événements successifs, **chronologiques**.

Démonstration

Remarquons que comme pour tout $k < n$, $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_k$, pour tout k, $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) > 0$ et donc tous les termes ont un sens.

$$\mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_{i+1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_{i+1}\right)}{\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_i\right)} = \mathbb{P}(A_1) \times \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

car le produit est télescopique. □

Exercice : Le problème des clés

Au lycée Carnot, il y a beaucoup de serrures différentes, on vous a prêté un trousseau de n clefs pour ouvrir une porte, et vous avez oublié de demander laquelle était la bonne.
De plus, elles se ressemblent suffisamment pour qu'il soit impossible de deviner à vue laquelle est la plus plausible.
Vous les essayez donc l'une après l'autre.
Quelle est la probabilité pour que ce soit la k^e clé testée qui vous ouvre la porte ($1 \leqslant k \leqslant n$) ?

Soit A_j l'événement « la clé n°j est la bonne ».
L'événement auquel on s'intéresse est alors $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
D'après la formule des probabilités composées, sa probabilité est (en modélisant chaque situation par une probabilité uniforme)

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_2}|\overline{A_1}\right)\cdots\mathbb{P}\left(A_k|\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-k+2}\right)\frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Logique ou non ?

Exercice

Dans une urne se trouvent $n-1$ boules blanches, 1 boule rouge. On tire, sans remise, boule après boule. Quelle est la probabilité pour que la boule rouge sorte de l'urne au k^e tirage ?

3 Probabilités totales

Définition : Système complet d'événements

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, I un ensemble fini ou dénombrable. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un **système complet d'évènements** lorsque

$$(i \neq j) \implies \left(A_i \cap A_j = \varnothing\right) \qquad \text{et} \qquad \bigsqcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

Remarques

R 1 – Si on impose de plus les A_i non vides, ce qui se fait parfois, $\{A_i\}_{i\in I}$ est une partition de Ω.

R 2 – En particulier, la famille $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}(\Omega)=1$, mais **ce n'est pas suffisant** pour avoir un sce !

Propriété : Formule des probabilités totales

Si $(A_i)_{i\in I}$ où I est fini ou dénombrable est un système complet d'événements, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i\in I}\mathbb{P}(B\cap A_i)$$

Si, de plus, pour tout i, $\mathbb{P}(A_i)>0$, $\mathbb{P}(B)=\sum_{i\in I}\mathbb{P}(B\mid A_i)\mathbb{P}(A_i)=\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$.

Si certains événements sont négligeables, alors les $B\cap A_i$ le seront aussi et il suffit de remplacer la somme pour $i\in I$ par la somme pour $i\in J=\{i\in I,\ \mathbb{P}(A_i)>0\}$.

Démonstration

Le fait d'avoir un sce permet d'écrire $B=\bigsqcup_{i\in I}(B\cap A_i)$. □

Remarque

La formule des probabilités totales est utile lorsque l'on fait une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction de cas, suivant le résultat de la première étape.

⚠ ne pas confondre $\mathbb{P}(B\cap A_i)$ et $\mathbb{P}(B\mid A_i)$!

Exercice : CCINP 101

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n\in\mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n)=a_n$, $P(B_n)=b_n$ et $P(C_n)=c_n$.

1. **(a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.**
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. **On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$.**
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D=P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. **Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.**
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

---

1. (a) (A_n,B_n,C_n) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
   $P(A_{n+1})=P(A_{n+1}|A_n)P(A_n)+P(A_{n+1}|B_n)P(B_n)+P(A_{n+1}|C_n)P(C_n)$.

   donc $a_{n+1}=0a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$.

(b) De même, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

2. (a) A est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable.

   (b) $A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc rg $\left(A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3\right) = 1$.
   Donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A) = 2$.
   L'expression de $A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ donne immédiatement que $E_{-\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   (c) Puisque $\mathrm{tr}(A) = 0$, on en déduit que 1 est une valeur propre de A de multiplicité 1.
   A étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires sur $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux deux à deux.
   On en déduit que $\mathbb{R}^3 = E_{-\frac{1}{2}}(A) \overset{\perp}{\oplus} E_1(A)$, donc que $E_1(A) = \left(E_{-\frac{1}{2}}(A)\right)^{\perp}$.
   Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, on a alors $D = P^{-1}AP$.

3. D'après la question 1., $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
   Et donc on prouve par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
   Or $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
   Or, d'après l'énoncé, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ donc :

   $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice : CCINP 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- **On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.**
- **On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.**
- **Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.**
- **Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. **Calculer p_1.**
2. **Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.**
3. **En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.**

---

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
   Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
   (U_1, U_2) est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

On résout l'équation $l = -\frac{6}{35}l + \frac{4}{7}$ et on trouve $l = \frac{20}{41}$.

On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.

Or $u_1 = p_1 - l = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}$.

On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\frac{3}{1435}\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.

4 Formule de Bayes

Propriété

Si A, B sont des événements non négligeables, alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Si, de plus, $\overline{A}$ n'est pas négligeable,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right)\ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}.$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) est un système complet d'événements non négligeables, on a

$$\forall\, i \in I \qquad \mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k\in I} \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}.$$

Démonstration

$\mathbb{P}(A \mid B)\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)$. □

Remarque

Formule permettant de remonter le temps, appelée aussi formule de probabilité des causes.

Exemples

E 1 – **Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.**
On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de $99\ \%$ lorsqu'elle est effectivement présente.
Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0,1\ \%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant qu'elle a été testée positive ? Commenter.

Sur Ω l'ensemble des personnes testées, avec la probabilité uniforme. Soit M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

D'après les informations dont on dispose, $\mathbb{P}(T \mid M) = 0,99$ et $\mathbb{P}\left(T \mid \overline{M}\right) = 10^{-3}$, $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$. Donc

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T \mid \overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)} = \frac{0,99 \cdot 10^{-5}}{0,99 \cdot 10^{-4} + (1 - 10^{-4})10^{-3}} \approx 9\ \%.$$

Cela est dû au fait que il est rare que le test soit positif (le dénominateur vaut $\mathbb{P}(T)$) mais très très rare que l'on ait un malade ($\mathbb{P}(M)$ est très petit devant $\mathbb{P}(T)$). Proportionnellement, il y a beaucoup plus de non malades testés positifs.

E 2 – **Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois sachant que derrière ces portes étaient dissimulées deux chèvres et une Ferrari. Une fois le choix effectué, l'animateur qui sait où est la**

Ferrari ouvre l'une des portes non choisies par le candidat, derrière laquelle il y a une chèvre. Il propose ensuite au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

Soit F_i l'événement « La Ferrari est derrière la porte numéro i ».

Supposons par exemple, que le candidat ait choisi la porte 1.

On a $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{3}$. (F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements.

Soit A l'événement « l'animateur ouvre la porte numéro 3 ».

On cherche $\mathbb{P}(F_2 \mid A)$ pour savoir si le candidat a intérêt à changer de porte. (Si l'animateur ouvre la porte 2, le raisonnement est le même).

D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A \mid F_3)\mathbb{P}(F_3)}$$

Or

- $\mathbb{P}(A \mid F_1) = \frac{1}{2}$ car les deux portes restantes contiennent une chèvre.
- $\mathbb{P}(A \mid F_2) = 1$ car si la Ferrari est derrière la deuxième porte, l'animateur ne peut ouvrir que la troisième porte.
- $\mathbb{P}(A \mid F_3) = 0$ car l'animateur ne dévoile pas la Ferrari.

Finalement, on trouve $\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{2}{3}$ et le candidat a deux fois plus de chances de gagner en changeant de porte qu'en la gardant.

En y réfléchissant bien, si on décide de changer de porte, on a au départ 2 chances de gagner (les portes où il y a les chèvres) et 1 de perdre, alors que si on décide de ne pas changer de portes, on a au départ 2 chances de perdre et 1 de gagner !

Exercice : CCINP 105

1. **Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.**
2. **On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).**
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) **On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.**
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$.**
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) **Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.**

1.
2. (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
   Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
   Notons A l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \dfrac{3}{4}$.

   Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

   $$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
   $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».
   On pose $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.
   On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.

   Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T)+P_{\overline{T}}(A)P\left(\overline{T}\right)}$$

Donc $p_n = \dfrac{\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.

Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

III Événements indépendants

1 Couple d'événements indépendants

Définition : Indépendance de deux événements

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$ sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B).$$

On note parfois $A \perp\!\!\!\perp B$ lorsque A et B sont indépendants.

Propriété

*Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(B)>0$ sont **indépendants** si et seulement si $\mathbb{P}(A\mid B)=\mathbb{P}(A)$.*

Remarques

R 1 – Cela traduit bien notre intuition : que B soit réalisé ou non, la probabilité de A ne change pas.

R 2 – Bien sûr, si $\mathbb{P}(A)>0$, cela s'écrit aussi $\mathbb{P}(B\mid A)=\mathbb{P}(B)$.

R 3 – ⚠ Ne pas confondre l'indépendance de deux événements et le fait qu'ils soient incompatibles. Ces notions s'excluent en général. En effet, si A et B sont incompatibles, $A\cap B=\varnothing$, donc $\mathbb{P}(A\cap B)=0$. Si A et B sont de probabilité non nulle, ils ne sont pas indépendants. (Ce qui se comprend car $A\subset\overline{B}$ par exemple).

R 4 – Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion ensembliste, l'indépendance est une notion probabiliste : elle dépend de la probabilité dont est muni Ω.

R 5 – Il n'est pas toujours facile de prédire si deux événements sont indépendants.

Naturellement, si deux événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont. Plus précisément :

Propriété

Si deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$ sont indépendants, alors
- *A et $\overline{B}$ sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et B sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Démonstration

- $\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$.
- Idem.
- d'après les deux premières. □

Remarque

Si A,B sont indépendant et A,C aussi, on ne peut rien dire en général de A et $B\cap C$ et de A et $B\cup C$.

Exercice

On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».

Montrer que A,B,C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B\cap C$, ni de $B\cup C$.

$\Omega=[\![1,6]\!]^2$, probabilité uniforme.

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$,

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cap C).$$

$\mathbb{P}(B\cup C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

$$\mathbb{P}\big(A\cap(B\cup C)\big)=\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cup C).$$

2 Famille d'événements indépendants

Définition

Soit $(A_i)_{i\in I}$ avec I fini ou dénombrable une famille d'événements.

- Les A_i sont dit **deux à deux indépendants** lorsque pour tout $i\neq j$, A_i et A_j sont indépendant, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_i\cap A_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- Les A_i sont dit **indépendants**, ou **mutuellement indépendants**, lorsque pour toute partie **finie** J de I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J}A_i\right)=\prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i).$$

Propriété

Si les A_i sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse si $n\geqslant 3$.

Démonstration

Prendre $|I|=2$.
Dans l'exemple précédent, A,B,C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants. □

Remarques

R 1 – C'est une propriété très forte : elle demande de vérifier énormément conditions ! En général, les espaces probabilisés sont construits pour avoir des événements mutuellement indépendants et on n'a donc pas à le vérifier à la main.

R 2 – L'indépendance mutuelle est stable par extraction de sous-familles.

R 3 – Attention c'est l'inverse des nombres premiers / polynômes entre eux :

mutuellement ⇒ deux à deux.

R 4 – Si les événements A_i sont deux à deux indépendants et si pour tout i on pose $B_i=A_i$ ou $\overline{A}_i$, alors les B_i sont deux à deux indépendants d'après la propriété vue précédemment. Cela se généralise aux événements mutuellement indépendants :

Propriété

Si les événement A_i pour $i \in I$ sont mutuellement indépendants et si pour tout i on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les B_i sont mutuellement indépendants.

Démonstration

On suppose I fini, ce qui ne nuit pas à la généralité, car l'indépendance est celle de toute sous famille finie.
On suppose que $B_k = \overline{A_k}$ et si $i \neq k$, $B_i = A_i$ (il n'y a qu'un complémentaire).
Alors, si J est une partie non vide de I,

- Soit $k \notin J$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(B_i)$.
- Si $k \in J$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J\setminus\{k\}} A_i \cap \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J\setminus\{k\}} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J\setminus\{k\}}\mathbb{P}(A_i) - \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i)\\ &= (1-\mathbb{P}(A_k))\prod_{i\in J\setminus\{k\}}\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\overline{A_k})\prod_{i\in J\setminus\{k\}}\mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(B_i).\end{aligned}$$

Puis récurrence sur le nombre de complémentaires. □

Exercice : Indicatrice d'Euler

Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$ où n est un entier non premier supérieur ou égal à 2, muni de la probabilité uniforme. Si $d|n$, on note $A_d = \{kd \mid k \in \Omega \text{ et } kd \in \Omega\}$.

1. **Quelle est la probabilité de A_d ?**
2. **Soit P l'ensemble des diviseurs premiers de n.**
   (a) **Démontrer que $(A_p)_{p\in P}$ est une famille d'événements indépendants.**
   (b) **En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble A des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n (indicatrice d'Euler).**

---

1. $\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{|A_d|}{|\Omega|} = \dfrac{\frac{n}{d}}{n} = \dfrac{1}{d}$.
2. (a) Si $p_1,\dots,p_\ell$ sont des diviseurs premiers deux à deux distincts de n, comme ils sont premiers, $\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{p_j} = A_{p_1\cdots p_\ell}$.
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{p_1\cdots p_\ell}) = \frac{1}{p_1\cdots p_\ell} = \prod_{j=1}^{\ell}\mathbb{P}(A_{p_j}).$$
   (b) Les $\overline{A}_p$ sont aussi indépendant, $A = \bigcap_{p\in P}\overline{A}_p$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p\in P}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$.

Exercice

Si $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :

- $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$,
- $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$.
- $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ **et** $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$,

- Direct,
- $A_1,\dots,A_p,\overline{A_{p+1}},\dots,\overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants, par le premier point, sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n}\overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i}$ donc sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$.
- idem avec $\overline{A_1},\dots,\overline{A_p},\overline{A_{p+1}},\dots,\overline{A_n}$.