Compacité, connexité par arcs

I Compacité

1 Parties compactes

Définition : de Bolzano-Weierstrß

Une partie K de E est dite **compacte** (ou est **un compact**) lorsque toute suite d'éléments de K a au moins une valeur d'adhérence **dans** K, c'est-à-dire qu'on peut en extraire une suite qui converge dans K.

Propriété

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Propriété

Soit K une partie compact de E et A une partie de K. Si A est fermée, alors A est compacte.

Propriété

Si $p \in \mathbb{N}^*$, $\left((E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_p, \|\cdot\|_p)\right)$ sont des K-espaces vectoriels normés et pour $i \in [\![1, p]\!]$, K_i compact de E_i, alors $K = K_1 \times \cdots \times K_p$ est un compact de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la norme produit.

2 Fonctions continues sur des compacts

Propriété : Image continue d'un compact

Si $f : K \to F$ avec K partie compacte de E et f continue, alors $f(K)$ est compacte.

Corollaire : théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un compact de E, à valeur réelles, est bornée et atteint ses bornes.

Théorème : de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

3 Cas de la dimension finie

a $\mathbb{K}$

Théorème : de Bolzano-Weierstraß

De toutes suite bornée d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire

Les compacts du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{K}$.

b Équivalence des normes

Théorème

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

c Compacts en dimension finie

Théorème

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont exactement ses parties fermées et bornées.

Corollaire

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Corollaire : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire : important !

Un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

4 Suites convergente dans un compact

Propriété

Soit K un compact. Une suite d'éléments de K est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Corollaire

***En dimension finie**, toute suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

II Connexité par arcs

1 Une relation d'équivalence

Définition : chemin continu

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Si $(a,b) \in A^2$, on appelle **chemin continu** joignant a à b dans A toute application $\phi : [0,1] \mapsto E$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- ϕ est continue
- $\forall\, t \in [0,1],\ \ \phi(t) \in A$
- $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$

Propriété

La relation $\mathscr{R}$ sur A^2 « sont joints par un chemin continu » est une relation d'équivalence.

2 Connexité par arcs

Définition : Composantes connexes par arcs

Soit A une partie de E. On appelle **composantes connexes par arcs** de A les classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$ définie précédemment.

Propriété

Les composantes connexes par arcs de A partitionnent A.

Définition : partie connexe par arcs

On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs : A elle-même.

Propriété : convexe $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Définition : Partie étoilée

A est dite étoilée s'il existe un point $a \in A$ tel que pour tout point b de A, le segment $[a, b]$ est inclus dans A.

Propriété : étoilée $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie étoilée de E est connexe par arcs.

3 Cas des parties de $\mathbb{R}$

Propriété

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

4 Image continue d'une partie connexe par arcs

Propriété

Si E, F sont des espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \to F$ une application continue, alors $\phi(A)$ est connexe par arcs.

Corollaire

Si f est une application continue, définie sur une partie A connexe par arcs, et à valeurs réelles, alors $f(A)$ est un intervalle.

Autrement dit, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : s'il existe $a \in A$ tel que $\phi(a) = \alpha$ et $b \in A$ tel que $\phi(b) = \beta$, alors, pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe $c \in A$ tel que $\phi(c) = \gamma$.