Compacité, connexité par arcs

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
Une partie compacte est fermée et bornée.	
Une partie fermée d'une partie compacte est compacte.	
Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.	
Produit d'une famille finie de compacts.	
Applications continues sur une partie compacte	
Image d'une partie compacte par une application continue.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.
Théorème de Heine.	
Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé	
Chemin continu joignant deux points.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.
Parties connexes par arcs.	Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.	Démonstration non exigible.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.	
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.	
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.	

TABLE DES MATIÈRES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne[1] $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

I COMPACITÉ

Remarque : Rappels

On rappelle que les valeurs d'adhérences d'une suite d'un espace-vectoriel normé sont les limites éventuelles de ses suites extraites.

On sait aussi qu'une suite convergente a une unique valeur d'adhérence (sa limite) mais que la réciproque est fausse.

Une suite peut n'avoir aucune valeur d'adhérence, et peut en avoir beaucoup (avec un beaucoup dénombrable ou non).

Exercice

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.

1. **Montrer qu'il y a équivalence entre**
   (i) ℓ **est valeur d'adhérence de** u.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ **est infini.**
   (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, **pour tout** $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ **n'est pas vide.**
2. **Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de** u **est fermé.**

1.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Si ℓ est valeur d'adhérence, φ extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \to \ell$, $\varepsilon > 0$, alors apcr $u_{\varphi(n)} \in B(\ell, \varepsilon)$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Soit $\varepsilon > 0$, si $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est majoré et si $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ ne peut être vide, sinon l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ serait majoré par p et inclus dans $\mathbb{N}$ donc fini.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ n'est pas vide, on construit une suite extraite convergeant vers ℓ : on pose $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(0) \geqslant 0$ et $u_{\varphi(0)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^0}\right)$.

Puis $\varphi(1) \geqslant p = \varphi(0) + 1$ tel que $u_{\varphi(1)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^1}\right)$.

Et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geqslant p = \varphi(n-1) + 1$ tel que $u_{\varphi(n)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^n}\right)$.

Alors φ est strictement croissante et, par construction, $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

2. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérences de u. Montrons que ${}^cA$ est ouverte.
   Si $x \in {}^cA$, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\{n, u_n \in B(x, \varepsilon)\}$ est fini et donc aucun des élément de $B(x, \varepsilon)$ ne peut être valeur d'adhérence non plus, c'est-à-dire que $B(x, \varepsilon) \subset {}^cA$, ce qui signifie bien que ${}^cA$ est ouverte et que A est fermée.

1 Parties compactes

a Définition

Définition : de Bolzano-Weierstrß

Une partie K de E est dite **compacte** (ou est **un compact**) lorsque toute suite d'éléments de K a au moins une valeur d'adhérence **dans** K, c'est-à-dire qu'on peut en extraire une suite qui converge dans K.

1. À ne pas confondre avec K qui désignera un compact...

Remarques

R 1 – $\varnothing$ est compacte.

R 2 – Par théorème de Bolzano-Weierstraß, tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.

b Un compact est fermé borné

Propriété

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Démonstration

Soit K une partie compacte de E.

Soit $u=(u_n)_n$ une suite d'éléments de K, convergeant vers $\ell\in E$. Comme K est compacte, on peut extraire de x une suite convergeant dans K. Par propriété des suites extraites et unicité de la limite, on a alors $\ell\in K$. Ainsi, K est fermée.

K est bornée sinon, on pourrait construire une suite $u\in K^n$ telle que $\|u\|\to+\infty$ (avec, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in B(0_E,n)$, par exemple) et dont les suites extraites ne peuvent converger. $\square$

Remarques

R 1 – La réciproque est fausse en général, mais on va voir qu'elle est vraie en dimension finie.

R 2 – Tout compact de $\mathbb{R}$ est inclus dans un segment.

Exemple

Dans $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|p_k|$ (avec des notations évidentes), $X^n\in S(0,1)$ (qui est fermée et bornée).

Si (X^n) a une valeur d'adhérence, on a $P\in\mathbb{K}[X]$ et φ extractrice telle que $\left\|X^{\varphi(n)}-P\right\|\to 0$. Alors chaque cœfficient de $X^{\varphi(n)}$ tend vers le cœfficient correspondant de P, donc $P=0_{\mathbb{K}[X]}$. Mais alors $1=\left\|X^{\varphi(n)}\right\|\to 0$ ce qui est contradictoire.

c Partie fermée d'un compact

Propriété

Soit K une partie compact de E et A une partie de K. Si A est fermée, alors A est compacte.

Remarques

R 1 – La réciproque est vraie ! Ainsi les partie de K fermées sont exactement les parties de K compacte.

R 2 – Parle-t-on de fermé de E ou de fermés relatifs de K ? En fait, c'est la même chose car le compact K est fermé. Il n'y a donc pas d'ambiguïté.

R 3 – En dimension finie, ce ne sera pas très intéressant car on va montrer que les compacts en général sont exactement les fermés bornés.

Démonstration

En effet, si $A\subset K$ est fermée, toute suite d'éléments de A donc de K a une valeur d'adhérence dans K et comme A est fermée, cette limite de sous-suite est nécessairement dans A, donc A est compacte. $\square$

d Produit de compacts

Propriété

Si $p \in \mathbb{N}^*$, $\left((E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_p, \|\cdot\|_p)\right)$ sont des K-espaces vectoriels normés et pour $i \in [\![1, p]\!]$, K_i compact de E_i, alors $K = K_1 \times \cdots \times K_p$ est un compact de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la norme produit.

Démonstration

C'est évident si $p = 1$, on montre le résultat pour $p = 2$ et la démonstration se généralise pour p quelconque.

Si, donc, K_1 et K_2 sont des compacts de E_1 et E_2, $u = \left((x_n, y_n)\right)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$.

Comme pour le théorème de Bolzano-Weierstraß, de $(x_n) \in K_1$ compact, on extrait $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ qui converge dans K_1, puis de $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ on extrait $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)$ convergeant dans K_2.

Alors $\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$ converge dans $K_1 \times K_2$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour $p > 2$, il suffit de continuer le procéder avec chaque nouvelle composante. $\square$

Remarque

La démonstration est intéressante, mais dans la pratique, en cas d'extractions multiples, il est légitime de se poser la question : peut-on faire apparaître un produit de compact ?

2 Fonctions continues sur des compacts

Propriété : Image continue d'un compact

Si $f : K \to F$ avec K partie compacte de E et f continue, alors $f(K)$ est compacte.

Remarques

R 1 – L'image continue d'un compact est compacte, et donc en particulier fermée et bornée.

R 2 – A ne pas confondre avec la propriété qui dit que l'image **réciproque** d'une partie relativement ouverte ou fermée de F l'est encore dans E.

Démonstration

Soit $y \in f(K)^{\mathbb{N}}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$.

De $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\ell \in K$.

Alors, par continuité, $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(\ell) \in f(K)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Corollaire : théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un compact de E, à valeur réelles, est bornée et atteint ses bornes.

Remarque

Trèèèès utile ! Et avec un petit goût de déjà-vu...

Démonstration

$f : K \to \mathbb{R}$ continue et K compacte, alors $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc fermée et bornée.

Donc f est bornée et si $M = \sup f$, alors on a une suite $(y_n) \in f(K)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers M par caractérisation séquentielle du sup et comme $f(K)$ est fermée, $M \in f(K)$.

On montre de la même manière que l'inf est atteint. □

a Théorème de Heine

Théorème : de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

Démonstration

Comme dans le cas réel, on raisonne classiquement par l'absurde.

Soit $f : K \to F$ continue et non uniformément continue. Alors

$$\exists \varepsilon > 0, \ \ \forall \eta > 0, \ \ \exists \left(x, x'\right) \in K^2, \ \ \left|x - x'\right| \leqslant \eta \text{ et } \left|f(x) - f(x')\right| > \varepsilon$$

Soit un tel $\varepsilon > 0$, avec, pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta = \dfrac{1}{(\zeta(2))^n}$, on a $x_n, x'_n \in \mathbb{K}$ tel que $\left|x_n - x'_n\right| \leqslant \dfrac{1}{(\zeta(2))^n}$ et $\left|f(x_n) - f(x'_n)\right| > \varepsilon$.

Mais $\left((x_n, x'_n)\right) \in \left(\mathbb{K}^2\right)^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^2$ est compacte donc on peut en extraire une suite $\left(x_{\varphi(n)}, x'_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers $\left(\ell, \ell'\right) \in \mathbb{K}^2$.

Mais $x_n - x'_n \to 0$ donc $\ell = \ell'$ et par continuité $\varepsilon < \left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(x'_{\varphi(n)}\right)\right| \to 0$ ce qui est contradictoire. □

3 Cas de la dimension finie

a $\mathbb{K}$

On a déjà vu que les segments de $\mathbb{R}$ était des compacts de $\mathbb{R}$.

Le théorème de Bolzano Weierstrß permet de démontrer le résultat suivant, généralise un peu plus loin.

Théorème : de Bolzano-Weierstraß

De toutes suite bornée d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire

Les compacts du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{K}$.

Démonstration

Soit K un compact du corps $\mathbb{K}$. On a déjà vu que K était fermé et borné.

Soit K une partie fermée et bornée du corps $\mathbb{K}$. Soit $x \in K^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. Par théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut en extraire une suite convergente. Mais comme K est fermée, la limite de la sous-suite est encore dans K qui est bien compact. □

Remarque

Les segments de $\mathbb{R}$ sont alors exactement les **intervalles** compacts de $\mathbb{R}$.

Mais il existe bien d'autre compacts qui ne sont pas des intervalles.

Par exemple, un ensemble fini est toujours compact (pourquoi ? – et c'est valable dans n'importe quel espace vectoriel normé).

Cependant, tout compact de $\mathbb{R}$ étant fermé et borné, il est inclus dans $[\inf K, \sup K] = [\min K, \max K]$ (le caractère fermé assurant le fait que les bornes soient atteintes).

Ainsi, les propriétés vraies « sur tout segment de $\mathbb{R}$ » sont aussi les propriétés vraies « sur tout compact de $\mathbb{R}$. »

b Équivalence des normes

Théorème

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Lemme

Les compacts de $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ sont exactement les parties fermées et bornées de $(\mathbb{K}^n, \|\|_\infty)$.

Remarque

On généralise à tout espace vectoriel normé de dimension finie ci-après.

Démonstration : du lemme

On sait déjà que les compacts sont fermés et bornés.

Soit A une partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\infty\|)$. Pour montrer qu'elle est compacte, il suffit de l'inclure dans un compact.

Or on a $M > 0$ tel que $x \in A \Longrightarrow \|x\|_\infty \leqslant M$. Alors, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \subset [-M, M]^n$ et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A \subset D(0, M)^n$ qui, dans les deux cas, est un produit fini de compacts donc un compact (et $\|\cdot\|_\infty$ est bien la norme produit de $|\cdot|$ n fois.) □

Démonstration : du théorème - Non exigible

Soit N une norme sur E espace vectoriel de dimension finie munie d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. On va montrer que N est équivalente à N_∞ définie par $N_\infty\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ ce qui suffit à conclure par transitivité.

Or, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \setminus \{0\}$, $\alpha N_\infty(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta N_\infty(x)$ revient à avoir $\alpha \leqslant N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \leqslant \beta$, avec $\frac{x}{N_\infty(x)}$ de norme 1, donc dans la sphère unité. Il se trouve qu'il n'est pas difficile de montrer que la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ est compacte.

On introduit alors l'application ϕ : $\left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ X = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \end{array}\right.$.

L'idée est de
- montrer que ϕ est continue,
- montrer que la sphère unité S de $\mathbb{K}^n$ est compacte pour $\|\cdot\|_\infty$,
- utiliser le fait que ϕ est bornée sur S,
- conclure.

Allons-y.

1. Montrons que ϕ est lipschitzienne. Si $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} |\phi(X) - \phi(Y)| = |\phi(x_1, \dots, x_n) - \phi(y_1, \dots, y_n)| &= \left| N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) - N\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) \right| \\ &\leqslant N\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i\right) && \text{par inégalité triangulaire sur } |\cdot| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) N(e_i) && \text{par inégalité triangulaire sur } N \\ &\leqslant k \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

   où on a posé $k = \sum_{i=1}^n N(e_i)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

   ϕ est donc k-lipschitzienne, donc continue.
2. Soit $S = S(0, 1)$ la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ pour $\|\cdot\|_\infty$. C'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{K}^n$, donc compacte d'après un résultat vu précédemment.
3. Comme ϕ est continue sur le compact S, elle atteint un minimum α et un maximum β sur S. Remarquons également que si $x \in S$, $x \neq 0$ et donc $\phi(x) \neq 0$ et $\alpha > 0$.
4. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \setminus \{0\}$, alors $\frac{1}{N_\infty(x)}(x_1, \dots, x_n) \in S$ donc $\alpha \leqslant N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \leqslant \beta$ puis $\alpha N_\infty(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta N_\infty(x)$. Si $x = 0_E$, l'encadrement reste valable.

Ainsi, N est équivalente à N_∞. □

C Compacts en dimension finie

Théorème

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont exactement ses parties fermées et bornées.

Démonstration

Soit $n = \dim E$.

Résultat déjà vu sur $\mathbb{K}^n$, que l'on transporte à E muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ via l'isomorphisme $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array}$,
qui est continue pour tout norme car on est en dimension finie et telle que si $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $x = f(X) \in E$, $\|X\|_\infty = N_\infty(x)$: f « transporte la norme. »

Si A est une partie fermée bornée de E, $f^{-1}(A)$ est donc fermée par continuité et bornée car f transporte la norme. Donc c'est un compact de $\mathbb{K}^n$. Donc $A = f\left(f^{-1}(A)\right)$ (car f est bijective) est compacte comme image continue d'un compact. □

Corollaire

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration

Une suite bornée est dans une boule formée qui est fermée et bornée donc compacte. □

Corollaire : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire : important !

Un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Remarque

Exercice classique : tout sous-espace strict d'un espace vectoriel normé est d'intérieur vide.

Démonstration

E evn, F sev de dimension finie, $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F, convergeant vers $\ell \in E$.

Alors (u_n) est bornée dans F qui est de dimension finie, donc admet une suite extraite convergeant dans F d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Par unicité de la limite, $\ell \in F$ et F est fermé. □

Exemple : Trèèèèès classique

$\mathcal{O}(n) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\intercal M = I_n\right\}$ **est compact.**

On est en dimension finie, il suffit de montrer que $\mathcal{O}(n)$ est fermée et bornée pour n'importe quelle norme.

Or $\mathcal{O}(n)$ est fermée comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto M^\intercal M$ (bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition) et bornée car, avec la norme euclidienne $\|M\| = \operatorname{tr}\left(M^\intercal M\right)$, on a $\mathcal{O}(n) \subset \overline{B}(0, n)$.

Remarque

Le théorème de Riesz (HP) dit qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Exercice : Mines

Montrer que la boule unité fermée de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte.

$f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ est continue, de norme 1 et converge simplement vers $\delta_{\cdot,1}$. Si on pouvait en extraire une suite uniformément convergente, la limite devrait être continue.

4 Suites convergente dans un compact

Propriété

Soit K un compact. Une suite d'éléments de K est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration

Le sens direct est vrai sans hypothèse de compacité.

Pour le sens réciproque, on raisonne par contraposée. On suppose que $u \in K^{\mathbb{N}}$ ne converge pas. On sait qu'elle a au moins une valeur d'adhérence $\ell \in K$.

On a $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $\|u_n - \ell\| > \varepsilon_0$.

On a donc $\phi(0) \geqslant 0$ tel que $\left\|u_{\varphi(0)} - \ell\right\| > \varepsilon_0$, puis $\phi(1) \geqslant \varphi(0)+1$ tel que $\left\|u_{\varphi(1)} - \ell\right\| > \varepsilon_0$ et on construit ainsi par récurrence une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|u_{\varphi(n)} - \ell\right\| > \varepsilon_0$.

Mais $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ étant à valeur dans le compact K, on peut en extraire une suite convergente. Sa limite, valeur d'adhérence de u ne peut valoir ℓ. □

Corollaire

***En dimension finie**, toute suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration

Toute boule fermée est compacte. □

II CONNEXITÉ PAR ARCS

1 Une relation d'équivalence

Définition : chemin continu

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Si $(a,b) \in A^2$, on appelle **chemin continu** joignant a à b dans A toute application $\phi : [0,1] \mapsto E$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- ϕ est continue
- $\forall\, t \in [0,1], \quad \phi(t) \in A$
- $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$

Propriété

La relation $\mathscr{R}$ sur A^2 « sont joints par un chemin continu » est une relation d'équivalence.

Démonstration

On vérifie facilement

Réflexivité : Prendre $\phi = \mathrm{id}_E$ qui est bien continue.

Symétrie : Si ϕ est un chemin continu joignant a à b, $1-\phi$ est un chemin continu joignant b à a.

Transitivité : Si ϕ joint a à b et ψ joint b à c, alors $\zeta : t \mapsto \begin{cases} \phi(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \psi(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$ est un chemin continu joignant a à c.

□

2 Connexité par arcs

Définition : Composantes connexes par arcs

Soit A une partie de E. On appelle **composantes connexes par arcs** de A les classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$ définie précédemment.

Remarque

La composante connexe par arc de $a \in A$ est l'ensemble des $b \in A$ pouvant être joints à b par un chemin continu.

Propriété

Les composantes connexes par arcs de A partitionnent A.

Exemple

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq 0\}$ possède quatre composantes connexes par arcs.

Définition : partie connexe par arcs

On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs : A elle-même.

Propriété : convexe $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Démonstration

On choisit le segment comme chemin continu. □

Définition : Partie étoilée

A est dite étoilée s'il existe un point $a \in A$ tel que pour tout point b de A, le segment $[a, b]$ est inclus dans A.

Remarque

Une partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Propriété : étoilée $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie étoilée de E est connexe par arcs.

Démonstration

Si A est étoilée par rapport à a, $b, c \in A$, alors le chemin continu constitué des segments $[b, a]$ et $[a, c]$ joint b à c en restant dans A. □

3 Cas des parties de $\mathbb{R}$

Propriété

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration

Les intervalles étant convexes, ils sont connexes par arcs.
Si réciproquement, $A \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs, on montre que A est convexe, ce qui permet de conclure.
Si $x, y \in A$, on a $\phi : [0,1] \to A$ continue telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Si $z \in [x, y]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous garantit l'existence de $t_0 \in [0,1]$ tel que $\phi(t_0) = z \in A$. □

Remarque

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les convexes.
C'est faux en général, par exemple dans $\mathbb{R}^2$.

4 Image continue d'une partie connexe par arcs

Propriété

Si E, F sont des espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \to F$ une application continue, alors $\phi(A)$ est connexe par arcs.

Remarque

Pour les ouverts et les fermés, c'est l'image réciproque par une application continue qui est ouverte ou fermée.
Pour les compacts ou les connexes par arcs, c'est l'image directe par une application continue qui est compacte ou connexe par arcs.

Démonstration

Il suffit de composer les chemins continus par f. □

Corollaire

Si f est une application continue, définie sur une partie A connexe par arcs, et à valeurs réelles, alors $f(A)$ est un intervalle.

Autrement dit, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : s'il existe $a \in A$ tel que $\phi(a) = \alpha$ et $b \in A$ tel que $\phi(b) = \beta$, alors, pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe $c \in A$ tel que $\phi(c) = \gamma$.

Remarque

Si pour résoudre une question on a envie d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, mais si on a une application (continue) qui n'est pas définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut penser à se demander si l'application ne serait pas, par hasard, définie sur une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé.