Convexité

I BARYCENTRES ET PARTIES CONVEXES D'UN ESPACE VECTORIEL

1 Barycentre

Définition : Barycentre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.

On appelle **barycentre** de $\big((x_1,\lambda_1),\dots,(x_n,\lambda_n)\big)$, l'élément g de E défini par

$$g = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

On note $g = \mathrm{Bar}\big((x_1,\lambda_1),\dots,(x_n,\lambda_n)\big)$.

Propriété : Associativité du barycentre

Soit $n,p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ et $(y_1,\dots,y_p) \in E^p$, $(\mu_1,\dots,\mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mu = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \neq 0$. On suppose en outre que $\lambda+\mu \neq 0$ et on pose

- $x = \mathrm{Bar}\big((x_1,\lambda_1),\dots,(x_n,\lambda_n)\big)$,
- $y = \mathrm{Bar}\big((y_1,\mu_1),\dots,(y_p,\mu_p)\big)$,
- $g = \mathrm{Bar}\big((x_1,\lambda_1),\dots,(x_n,\lambda_n),(y_1,\mu_1),\dots,(y_p,\mu_p)\big)$.

Alors

$$g = \mathrm{Bar}\big((x,\lambda),(y,\mu)\big).$$

2 Parties convexes

Définition : Segment

Si a et b sont deux éléments de E, on définit le segment $[a,b]$

$$[a,b] = \big\{(1-t)a+tb\ ;\ t \in [0,1]\big\}$$

Définition : Partie convexe

On dit qu'une partie C de E est convexe lorsque, pour tout couple (a,b) d'éléments de C, le segment $[a,b]$ est inclus dans C, c'est-à-dire lorsque

$$\forall\,(a,b) \in C^2,\quad \forall\, t \in [0,1],\quad (1-t)a+tb \in C$$

Propriété : Caractérisation par les barycentres

C est convexe si et seulement si elle est stable par barycentre à cœfficients positifs, autrement dit si et seulement si pour tout $n \geqslant 1$, pour tout n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de réels vérifiant

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\dots,\lambda_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = 1\,,$$

et pour tout n-uplet $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de C, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$.

Propriété : Les boules sont convexes

Toute boule d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est convexe.

II FONCTIONS CONVEXES D'UNE VARIABLE RÉELLE

I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

1 Définitions

Définition : Fonction convexe, concave

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque
$$\forall\, x,y \in I,\quad \forall\, t \in [0,1],\quad f\big((1-t)x+ty\big) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y)$$
- f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe.

Propriété : Caractérisation par interprétation géométrique

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.

Définition : Épigraphe

La partie $\mathscr{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de f s'appelle son **épigraphe**.

$$(x,y) \in \mathscr{E}(f) \iff y \geqslant f(x)$$

2 Caractérisations

Propriété : Caractérisation avec l'épigraphe

f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe $\mathscr{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur I.

*(ii) **Inégalité des trois cordes** : si $x,y,z \in I$, $x<y<z$,*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

*(iii) **Croissance des pentes** : pour tout $a \in I$,*

$$\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right. \quad \text{est croissante}$$

3 Cas des fonctions dérivables

Propriété : Caractérisation avec la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I

Corollaire : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (respectivement $f'' \leqslant 0$) sur I.

Propriété : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.

III INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ

Propriété : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

- *Si f est convexe, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$. En particulier, $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$.*
- *Si f est concave, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$. En particulier, $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$.*

Exemples : Très classiques

E 1 – **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

E 2 – $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$. $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$.

E 3 – $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.