CHAPITRE XIV

Intégrales à paramètres

I Rappel : limite d'une intégrale à paramètre

Théorème : de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

On suppose

- **H1** *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.*
- **H2** *La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.*
- **H3** ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi\in\mathscr{C}_m\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in I,\quad \left|f_n(t)\right|\leqslant\phi(t)$$

Alors

- **C1** *Les f_n et f sont intégrables sur I.*
- **C2** $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f.$

Théorème : Extension du théorème de convergence dominée

Soit I et J des intervalles, $a\in\overline{J}$ éventuellement infini et $f:\begin{array}{|ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}$

On suppose

- **H1** *Pour tout $x\in J$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*
- **H2** *Pour tout $t\in I$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{} h(t)$ avec h continue par morceaux sur J.*
- **H3** ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi\in\mathscr{C}_m\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall x\in J,\ \forall t\in I,\quad \left|f_x(t)\right|=\left|f(x,t)\right|\leqslant\phi(t)$$

Alors

- **C1** *Les $t\mapsto f(x,t)$ et h sont intégrables sur I.*
- **C2** $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I h(t)\,\mathrm{d}t.$

II Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit X une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie et I un intervalle réel et $f:\begin{array}{|ccc} X\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}$ *On suppose*

- **H1** *Pour tout $t\in I$, f est continue par rapport à la première variable :*

$$\forall t\in I,\quad x\mapsto f(x,t) \text{ est continue sur } X.$$

- **H2** *Pour tout $x\in X$, f est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable :*

$$\forall x\in X,\quad t\mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I.$$

- **H3** ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi\in\mathscr{C}_m\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall x\in X,\ \forall t\in I,\quad \left|f(x,t)\right|\leqslant\phi(t)$$

Alors

- **C1** $g:x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur X.*

Théorème : Extension par domination locale

*On peut remplacer **H3** par*

H3 Hypothèse de domination locale *: Pour tout $x\in X$, il existe un voisinage V de x et une fonction $\phi_V\in\mathscr{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall x\in V,\quad \forall t\in I,\quad \left|f(x,t)\right|\leqslant\phi_V(t)$$

ou bien si $X\subset\mathbb{R}$: pour tout segment S de X, il existe une fonction $\phi_S\in\mathscr{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que

$$\forall x\in S,\quad \forall t\in I,\quad \left|f(x,t)\right|\leqslant\phi_S(t)$$

III DÉRIVABILITÉ D'UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE

Théorème : Classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$ On suppose

H1 *Pour tout $t\in I$, $f_t : x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à la première variable x sur J, de dérivée $f_t'(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.*

H2 *Pour tout $x\in J$, f est **intégrable** par rapport à la deuxième variable (et en particulier continue par morceaux) sur I :*

$$\forall x\in J,\quad t\mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur } I.$$

H3 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *vérifie toutes les hypothèse du théorème de continuité :*

H3 (1) $\left[\text{Pour tout } t\in I,\ x\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue sur } J\right]$ DÉJÀ DANS **H1** !

H3 (2) *Pour tout $x\in J$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue par morceau sur I*

H3 (3) ***Hypothèse de domination** globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi\in\mathscr{C}_m\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ intégrable sur J telle que*

$$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J*

C2 $\forall x\in J,\quad t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g'(x)=\displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$ et $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose

H1 *Pour tout $t\in I$, $f_t : x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, de dérivée d'ordre j notée $f_t^{(j)}(x)=\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$.*

H2 *Pour tout entier j tel que $0\leqslant j\leqslant k-1$, pour tout $x\in J$, $t\mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est **intégrable** sur I.*

H3 $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ *vérifie toutes les hypothèse du théorème de continuité :*

H3 (1) $\left[\text{Pour tout } t\in I,\ x\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \text{ est continue sur } J\right]$ DÉJÀ DANS **H1** !

H3 (2) *Pour tout $x\in J$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ continue par morceau sur I*

H3 (3) ***Hypothèse de domination** globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi\in\mathscr{C}_m\left(I,\mathbb{R}^+\right)$ intégrable sur J telle que*

$$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J*

C2 $\forall j\in[\![1,k]\!],\ \ \forall x\in J,\ \ t\mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(j)}(x)=\displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

En l'appliquant pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient un théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Corollaire : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ *On suppose*

H1 *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.*

H2 *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ est **intégrable** sur I.*

H3 ***Pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie toutes les hypothèse du théorème de continuité :*

H3 (1) $\left[\text{Pour tout } t \in I,\ x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \text{ est continue sur } J\right]$ DÉJÀ DANS **H1** !

H3 (2) *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ continue par morceau sur I*

H3 (3) ***Hypothèse de domination** globale ou sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi \in \mathscr{C}_m\left(I, \mathbb{R}^+\right)$ intégrable sur J telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 *$g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J*

C2 $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est intégrable sur I et* $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$.