Limites d'intégrales

I INTERVERSION LIMITES ET INTÉGRALES

1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment

Théorème : Interversion limite et intégrale par convergence uniforme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Alors

C1 *f est continue sur $[a,b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

2 Théorème de convergence dominée

Théorème : de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

On suppose

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.*

H2 *La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_n et f sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f.$

Démonstration

Hors-programme. □

3 Extension du théorème

En utilisant le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle de la limite, on peut déterminer des limites d'intégrale avec un paramètre qui n'est pas nécessairement un entier.

On peut donner l'énoncé suivant qui n'est pas à connaître par cœur : dans la pratique, on peut repasser à la main par les suites. Mais l'énoncé est très proche du précédent !

Théorème : Extension du Théorème de Convergence Dominée

Soit J intervalle, $\lambda_0 \in \overline{J}$ éventuellement infini.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

On suppose

H1 *Pour tout $\lambda \in J$, f_λ est continue par morceaux sur I.*

H2 *Pour tout $x \in I$, $f_\lambda(x) \xrightarrow[x\to\lambda_0]{} f(x)$ avec f continue par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall \lambda \in J,\ \forall t \in I,\quad \left|f_\lambda(t)\right| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_λ et f sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \int_I f.$

De nouveau, l'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_λ.

Dans dans la pratique, on prend une suite $(\lambda_n)_n$ tendant vers λ_0 et on applique le théorème de convergence dominée à $\left(f_{\lambda_n}\right)_n$.

II INTERVERSION SÉRIE-INTÉGRALE

1 Rappel : convergence uniforme sur un segment

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $E^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*

C3 $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

Hors programme. □

2 Cas général

Théorème : Interversion séries-intégrales

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 *La série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I.*

H2 *Chaque f_n est intégrable sur I.*

H3 *La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.*

Alors

C1 $\sum \int_I f_n$ *converge*

C2 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est intégrable sur I*

C3 $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$

Méthode : Interversion séries-intégrales

Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

1. Le théorème qui vient d'être vu, avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$.
2. Si $I = [a, b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément.
   Le plus agréable serait qu'elle converge normalement [a], donc que $\sum N_\infty(f_n)$ converge.
3. Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique. Posant alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on écrit, pour tout $n \geqslant 0$, $S = \sum_{k=0}^{n} f_k + R_n$ avec des notations habituelles : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.
   Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_a^b R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est fini. (Pour cela il faut majorer $|R_n(t)|$, par exemple avec le théorème sur le séries alternées...)
   On peut aussi envisager d'appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_a^b S_n(t)\mathrm{d}t$, lorsque l'on peut estimer, voire calculer $S_n(t)$.

a. Et, en fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$, le théorème précédent s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.