Limites d'intégrales

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Passage à la limite sous l'intégrale	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert \mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et $$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I \lvert f_n\rvert$.

TABLE DES MATIÈRES

I INTERVERSION LIMITES ET INTÉGRALES

1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment

Théorème : Interversion limite et intégrale par convergence uniforme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Alors

C1 *f est continue sur $[a,b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarque

Un joli théorème mais qui demande
- d'être sur un segment,
- des fonctions continues dans le programme (mais continues par morceaux suffirait... sauf que le continuité par morceaux, contrairement à la continuité, ne se transmet pas par convergence uniforme),
- de la convergence uniforme !

Donc, dans la pratique, il ne s'applique pas si souvent...

2 Théorème de convergence dominée

Le but est d'intervertir limite et intégrale sur un intervalle quelconque.

Théorème : de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.
On suppose

H1 *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.*

H2 *La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi\in\mathscr{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in I,\quad \left|f_n(t)\right|\leqslant\phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_n et f sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$.

Démonstration

Hors-programme. □

Remarques

R 1 – « **continues par morceaux** » est une hypothèse rendue nécessaire par le fait que nous ne savons pas intégrer autre chose.

R 2 – « **à valeurs réelles ou complexes** » est aussi une hypothèse rendue nécessaire par le fait que lorsqu'on parle d'intégrales ailleurs que sur un segment, on se limite aux fonctions à valeurs complexes.

R 3 – « **continue par morceaux** » : déjà, la convergence uniforme ne transmet pas la continuité par morceaux (elle transmet la continuité), et ici on n'impose que la convergence simple, ce qui ne transmet vraiment rien du tout.

R 4 – La fonction ϕ est nécessairement à valeurs réelles positives.

R 5 – Sur un segment, lorsqu'il y a continuité et convergence uniforme, pas besoin de domination. Mais dans ce cas, il suffit de dominer par une fonction constante.

R 6 – L'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_n.

Exercice : Wallis

Démontrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$ converge, donner sa limite.

Définissons

$$f_n : \left|\begin{array}{ccc}]0,\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin^n t\end{array}\right.$$

La suite (f_n) converge simplement vers $\widetilde{0}$. L'hypothèse de domination est facile à réaliser :

$$\forall n\geqslant 0\quad \forall t\in]0,\pi/2[\qquad |\sin^n t|\leqslant 1$$

Or la fonction $t\longmapsto 1$ est indépendante de n, et intégrable sur $]0,\pi/2[$.

Les fonctions f_n et la fonction $\widetilde{0}$ sont continues par morceaux, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{\pi/2} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/2} 0 = 0$$

Remarque

On rencontre beaucoup de suites monotones de fonctions (à ne pas confondre avec une suite de fonctions monotones : une suite croissante de fonctions, c'est une suite (f_n) telle que, pour tout n, $f_n \leqslant f_{n+1}$, autrement dit pour tout n et pour tout x, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$).

Si on ne sait pas par quoi dominer la famille f_n, on pourra donc essayer de dominer soit par la valeur absolue de la limite simple de la suite (f_n), soit par $|f_0|$ (ou $|f_1|\ldots$).

Exercice : Utilité de l'hypothèse de domination

Définissons, sur $[0,1]$, f_n continue affine par morceaux nulle en 0 et sur $\left[\frac{1}{n+1},1\right]$, et prenant en $\frac{1}{n+1}$ la valeur $n+1$.
Étudier la convergence simple de (f_n) et la convergence de $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice : CCINP 25

1. **Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.**
2. **Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n).**

---

1. $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
De plus, $\forall\, t\in[0,+\infty[$, $\left|f_n(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.
Or $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc, par critère de majoration pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Or f_n est continue sur $[0,1]$ donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. i) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t^2} & \text{si } t\in[0,1[\\ \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} & \text{si } t=1 \\ 0 & \text{si } t\in]1,+\infty[\end{cases}$

ii) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.

iii) $\forall\, t\in[0,+\infty[,\left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
Alors, d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.
Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$.

Exercice : CCINP 26

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. **Justifier que I_n est bien définie.**
2. **(a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. **La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?**

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^n}$.

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $|f_n(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$.
   Or $n \geqslant 1$, alors $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Donc, par règle d'équivalence pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Or f_n est continue sur$[0,1]$, donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. (a) $\forall\, t \in [0,+\infty[$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ car $1+t^2 \geqslant 1$.
   En intégrant, on obtient : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leqslant I_n$.
   Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) Remarque : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et clairement positive ce qui nous assure la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Déterminons la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   ii) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   De plus, f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   iii) $\forall\, t \in [0,+\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \left|f_n(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
   En effet φ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. Comme $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Comme φ est continue sur $[0,1]$, donc φ est intégrable sur $[0,1]$ donc sur $[0,+\infty[$.
   Par le théorème de convergence dominée on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0.
3. D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et converge vers 0.
   Donc, par application du théorème spécial des séries alternées, on peut affirmer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$.

Exercice : CCINP 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. **Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.**
2. **Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?**
3. **La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?**
4. **Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

---

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $f_n(0) = 1$.
   Si $x \in]0,1]$, pour n au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\dfrac{1}{n^2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
2. Soit $a \in]0;1[$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [a,1]$, $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$ (majoration indépendante de x).
   Donc $\sup\limits_{t\in[a,1]} |f_n(t) - f(t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{t\in[a,1]} |f_n(t) - f(t)| = 0$
   On en déduit que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,1]$.
3. Les fonctions f_n étant continues sur $[0,1]$ et la limite simple f ne l'étant pas, on peut assurer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$.

4. i) Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $[0,1]$.
   ii) (f_n) converge simplement vers f sur $[0,1]$, continue par morceaux sur $[0,1]$.
   iii) De plus, $\forall x \in [0,1], \left|f_n(x)\right| \leqslant e^{-x} \leqslant 1 = \varphi(x)$ avec $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.
   D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

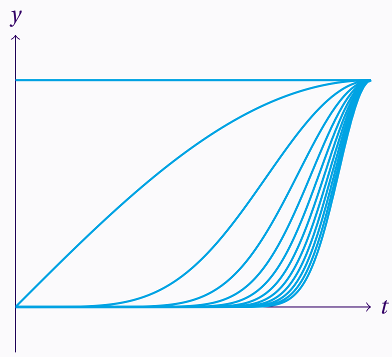
3 Un découpage d'intégrale

Exercice

On peut démontrer la convergence vers 0 de la suite des intégrales de Wallis sans utiliser le théorème de convergence dominée. On considère $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

On remarque d'abord que l'on est sur un segment, mais qu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite $(\sin^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Traçons des graphes de ces fonctions :



On voit qu'elle concentre son intégrale au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, ce qui motive le découpage suivant : soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

En déduire le résultat.

On a, pour tout n,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n t\;dt \;+\; \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\;dt \\ &\leqslant \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Mais $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| \leqslant 1$, donc il existe un rang N à partir duquel $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $n \geqslant N \;\Rightarrow\; 0 \leqslant I_n \leqslant \varepsilon$, ce qui permet de conclure.

4 Extension du théorème

En utilisant le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle de la limite, on peut déterminer des limites d'intégrale avec un paramètre qui n'est pas nécessairement un entier.

On peut donner l'énoncé suivant qui n'est pas à connaître par cœur : dans la pratique, on peut repasser à la main par les suites. Mais l'énoncé est très proche du précédent !

Théorème : Extension du Théorème de Convergence Dominée

Soit J intervalle, $\lambda_0 \in \overline{J}$ éventuellement infini.
Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.
On suppose

H1 *Pour tout $\lambda \in J$, f_λ est continue par morceaux sur I.*

H2 *Pour tout $x \in I$, $f_\lambda(x) \xrightarrow[x \to \lambda_0]{} f(x)$ avec f continue par morceaux sur I.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall \lambda \in J,\ \forall t \in I, \quad |f_\lambda(t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les f_λ et f sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} \int_I f.$

De nouveau, l'hypothèse de domination donne directement l'intégrabilité, par comparaison, des f_λ.

Dans dans la pratique, on prend une suite $(\lambda_n)_n$ tendant vers λ_0 et on applique le théorème de convergence dominée à $(f_{\lambda_n})_n$.

Exercice : Calcul de limite d'une transformée de Laplace

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t$ **a une limite quand** $x \to +\infty$ **; la calculer.**

Domination par $\dfrac{1}{1+t^2}$, limite nulle.

Exercice : Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

Changement de variable $u = st$.

Exercice : Utilisation pour le calcul d'une intégrale semi-convergente

Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ **converge.**

On définit, si $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$

Calculer la limite de F en $+\infty$.

Puis montrer que $F(x) \xrightarrow[x \to 0]{} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0. *On pourra utiliser la fonction* $g : x \to \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Lorsque l'on saura dériver ce type de fonctions, cela nous permettra de retrouver la valeur de I : cela revient sous quelques hypothèses à dériver sous le signe intégral, ce qui permet de montrer que pour $x > 0$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$.

Exercice : CCINP 50

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \mathrm{d}t.$

1. **Prouver que F est définie ~~et continue~~ sur $]0; +\infty[$.**
2. **Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.**
3. **Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.**

1.
2. $\forall x \in]0; +\infty[$, $xF(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t} \mathrm{e}^{-2t} \mathrm{d}t.$
   Posons $\forall x \in]0; +\infty[$, $\forall t \in [0; +\infty[$, $h_x(t) = \frac{x}{x+t} \mathrm{e}^{-2t}$.

i) $\forall x \in]0;+\infty[$, $t \longmapsto h_x(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
ii) $\forall t \in [0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h_x(t) = e^{-2t}$.
La fonction $h : t \mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
iii) $\forall x \in]0;+\infty[$, $\forall t \in [0;+\infty[$, $|h_x(t)| \leqslant e^{-2t}$ et $t \mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.
Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à $(h_x)_{x\in]0;+\infty[}$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_x(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = \frac{1}{2}$.

3. D'après 2., $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = \frac{1}{2}$, donc $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Exercice

Retrouver les résultats de l'exercice précédent à l'aide d'un changement de variable.

II INTERVERSION SÉRIE-INTÉGRALE

1 Rappel : convergence uniforme sur un segment

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $E^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a,b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*

C3 $\int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2 Cas général

Théorème : Interversion séries-intégrales

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 *La série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et que sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I.*

H2 *Chaque f_n est intégrable sur I.*

H3 *La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.*

Alors

C1 $\sum \int_I f_n$ *converge*

C2 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est intégrable sur I*

C3 $\int_I \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Démonstration

Hors programme. □

Remarque

On note en général $N_1(f_n) = \int_I |f_n|$. L'hypothèse cruciale **H3** s'écrit alors : $\sum N_1(f_n)$ converge. Y voir un parallèle avec le théorème de Fubini (sommabilité).

Méthode : Interversion séries-intégrales

Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

1. Le théorème qui vient d'être vu, avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$.
2. Si $I = [a, b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément.
   Le plus agréable serait qu'elle converge normalement [a], donc que $\sum N_\infty(f_n)$ converge.
3. Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique. Posant alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on écrit, pour tout $n \geqslant 0$, $S = \sum_{k=0}^{n} f_k + R_n$ avec des notations habituelles : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

   Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_a^b R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est fini. (Pour cela il faut majorer $|R_n(t)|$, par exemple avec le théorème sur le séries alternées...)

   On peut aussi envisager d'appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_a^b S_n(t)\mathrm{d}t$, lorsque l'on peut estimer, voire calculer $|S_n(t)|$.

a. Et, en fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$, le théorème précédent s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.

Exemples

E 1 – Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

E 2 – On suppose que (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum |a_n|$ converge. On définit, sur $\mathbb{R}$, $f : t \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$.

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t)\mathrm{d}t = a_m$.

E 3 – Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice : CCINP 19

1. **Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$.**
2. **Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,n!}$.**

---

1. On pose, pour tout entier naturel n, pour tout $t \in]0,1]$, $f_n(t) = t^n \ln t$.
   Pour tout entier naturel n, f_n est continue par morceaux sur $]0,1]$.
   On a $t^{\frac{1}{2}}|f_n(t)| \xrightarrow[t\to0]{} 0$ donc, au voisinage de 0, $|f_n(t)| = o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$.
   Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1]$(fonction de Riemann intégrable).
   Donc f_n est intégrable sur $]0,1]$.
   De plus,pour $x \in]0,1]$, par intégration par parties :

$$\int_x^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

On en déduit, en faisant tendre x vers 0, que $I_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

2. $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ donc, pour tout $t \in]0,1]$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n!}$.

   On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in]0,1],\ g_n(t) = \dfrac{t^n \ln t}{n!}$.

   i) $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ d'après la question 1.
   ii) $\sum g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et a pour somme f.
   iii) f est continue par morceaux sur $]0,1]$.
   iv) $\displaystyle\sum \int_0^1 \left|g_n(t)\right| \mathrm{d}t = \sum \int_0^1 \frac{-t^n \ln t}{n!} \mathrm{d}t = \sum \frac{-I_n}{n!} = \sum \frac{1}{(n+1)^2 n!}$.
   On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2 n!} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   De plus, $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2 n!}$ converge.
   Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions,

   f est intégrable sur $]0,1]$ et on a :
   $$\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{n!} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)}.$$
   C'est-à-dire, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n n!}$.

Exercice : CCINP 49

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

1. **(a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.**
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. **(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.**

   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$.

   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

---

1. Rappelons que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge ($\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$).
   (a) $\sum a_n$ converge absolument, donc converge simplement; donc la suite (a_n) converge vers 0 et donc elle est bornée.
   Autre méthode : On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant M = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|$.

   (b) La suite (a_n) est bornée donc $\exists K \in \mathbb{R}^+ \ /\ \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant K$.
   Soit $t \in [0,+\infty[$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(t)\right| \leqslant K \dfrac{t^n}{n!}$. Or la série $\sum \dfrac{t^n}{n!}$ converge, donc $\sum f_n(t)$ converge absolument, donc converge.
   On a donc vérifié la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0,+\infty[$.
2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 g_n(t) = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $g_n(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc g_n est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

En effectuant une intégration par parties, on prouve que $I_n = nI_{n-1}$.
On en déduit par récurrence que $I_n = n!I_0 = n!$.
Alors $t \mapsto |f_n(t)|$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $|f_n(t)| = \dfrac{|a_n|}{n!} g_n(t)$.
Et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{n!} n! = |a_n|$.

(b) i) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après la question 2.(a)

ii) $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et a pour somme $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ d'après 1.(b).

iii) f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ d'après la question 1.(b) (admis)

iv) $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \sum |a_n|$ et $\sum |a_n|$ converge par hypothèse, donc $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions, f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} n! = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$