E.P.I.T.A. 2017

Corrigé de l'épreuve de mathématiques (3 h) - Filières MP-PC-PSI

■ PARTIE I : Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

1°) *Etude de la convergence de l'intégrale* $I(\alpha)$

a) On sait que $\sin(t) \sim t$ quand t tend vers 0, donc $\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ quand t tend vers 0.

b) La fonction $t \longrightarrow \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, \pi]$, et équivaut à $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ en 0.
Son intégrale $I(\alpha)$ converge donc si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, soit $\alpha < 2$.

2°) *Etude de l'absolue convergence de l'intégrale* $J(\alpha)$

a) La fonction $t \longrightarrow \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $[\pi,+\infty[$, et est majorée par $\frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$.
Elle converge si $\alpha > 1$, et l'intégrale $J(\alpha)$ est donc absolument convergente pour $\alpha > 1$.

b) Il est clair que $|\sin(t+\pi)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)|$, et l'intégrale étant évidemment la même sur chaque période, on a :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^\pi = 2.$$

c) Pour t appartenant à l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, on a : $\frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \le \frac{1}{t^\alpha} \le \frac{1}{k^\alpha \pi^\alpha}$, d'où :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{k^\alpha \pi^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t.$$

En remplaçant l'intégrale par sa valeur, on obtient comme attendu :

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \le \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

Par sommation pour $1 \le k \le n-1$, il vient alors :

$$\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \le \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \le \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}.$$

d) Pour $\alpha \le 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ diverge. D'après l'inégalité à gauche ci-dessus, l'intégrale précédente diverge vers $+\infty$ et l'intégrale $J(\alpha)$ n'est pas absolument convergente.

- Pour $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge. D'après l'inégalité à droite ci-dessus, l'intégrale précédente converge et on retrouve l'absolue convergence de $J(\alpha)$.

Ainsi, l'intégrale $J(\alpha)$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

3°) *Etude de la convergence de l'intégrale* $J(\alpha)$

a) L'intégrale $J(0)$ diverge car l'intégrale suivante n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$:

$$\int_\pi^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = -1 - \cos(x).$$

b) Intégrons par parties l'intégrale proposée :

$$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right]_\pi^x - \alpha\int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha\int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t\,.$$

c) L'intégrale proposée converge pour $\alpha > 0$ et elle se calcule facilement car :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_\pi^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{\alpha\, t^\alpha}\right]_\pi^x = \frac{1}{\alpha\,\pi^\alpha}.$$

Comme $\left|\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, et comme l'intégrale de $t \longrightarrow \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est convergente, l'intégrale de $t \longrightarrow \left|\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\right|$ est aussi convergente, ce qui établit l'absolue convergence de $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

d) On obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue ci-dessus en (b) :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \alpha\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ainsi, l'intégrale $J(\alpha)$ est convergente pour $\alpha > 0$.

4°) *Domaine de définition de la fonction f*

L'intégrale $f(\alpha)$ converge si et seulement si les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent.
C'est le cas si et seulement si $\alpha < 2$ et $\alpha > 0$, soit $0 < \alpha < 2$.
Le domaine de définition de la fonction f est donc l'intervalle ouvert $]\,0, 2[$.

L'intégrale $f(\alpha)$ converge absolument si et seulement $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent absolument. Mais l'intégrale $I(\alpha)$ étant simultanément convergente et absolument convergente puisque la fonction qu'on intégre est positive sur $[0, \pi]$, l'intégrale $f(\alpha)$ est absolument convergente si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

■ PARTIE II : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

5°) *Limite de l'intégrale* $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

a) Par concavité de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a l'inégalité $0 \leq \sin(t) \leq t$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
(On peut naturellement retrouver l'inégalité $\sin(t) \leq t$ en étudiant $t \longrightarrow t - \sin(t)$).

b) Appliquons le théorème de convergence dominée à l'intégrale proposée :

- Pour tout $t \in \left]\,0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(t)}{t^\alpha} = \sin(t).$$

- Pour $0 < \alpha \leq 1$, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a la majoration suivante :
$$0 \leq \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \leq \frac{t}{t^\alpha} = t^{1-\alpha} \leq 1.$$
La fonction constante 1 étant intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le théorème s'applique et on a donc :
$$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

6°) *Limite de l'intégrale* $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

a) Par intégration par parties, il vient :
$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(t)}{t^\alpha}\right]_{\pi/2}^{x} - \alpha \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$
Une seconde intégration par parties donne ensuite :
$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(t)}{t^\alpha}\right]_{\pi/2}^{x} - \alpha\left(\left[\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}\right]_{\pi/2}^{x} + (\alpha+1)\int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t\right).$$
En évaluant les crochets et en faisant tendre x vers $+\infty$, et compte tenu de la convergence de la première intégrale, donc de la dernière, on obtient l'égalité annoncée :
$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t.$$

b) L'intégrale proposée converge pour $\alpha > 0$ et elle se calcule facilement car :
$$\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}} = \alpha(\alpha+1)\left[\frac{-1}{(\alpha+1)\,t^{\alpha+1}}\right]_{\pi/2}^{+\infty} = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}}.$$
Cette expression tend vers 0 quand α tend vers 0, et l'inégalité de la moyenne donne alors :
$$\alpha(\alpha+1)\left|\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t \leq \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}} = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}}.$$
Il en résulte que cette expression tend vers 0 quand α tend vers 0.
Et en reportant dans l'égalité obtenue ci-dessus en 6.a), on en déduit que :
$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0.$$

c) D'après cette question et la précédente, il vient enfin :
$$\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \lim_{\alpha \to 0} \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1.$$
Ainsi, l'intégrale $f(\alpha)$ a une limite finie quand α tend vers 0, que le théorème de convergence dominée ne donne pas puisque l'intégrale de la limite diverge en effet (cf 5.a).
Il en résulte que l'hypothèse de domination du théorème n'est donc pas vérifiée ici.

■ Partie III : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7°) *Une autre expression de la fonction f*

a) La fonction $t \longrightarrow \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ et comme $0 < \alpha < 2$:

• au voisinage de 0, elle équivaut à $\frac{1}{2\, t^{\alpha-1}}$, qui est intégrable car $\alpha - 1 < 1$.

• au voisinage de $+\infty$, elle est majorée par $\frac{2}{t^{\alpha+1}}$, qui est intégrable car $\alpha + 1 > 1$.

b) Une intégration par parties sur $[a, x]$ avec $0 < a < x$ donne :

$$\int_a^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}\right]_a^x + \alpha \int_a^x \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt.$$

Lorsque a tend vers 0 et x vers $+\infty$, le crochet tend vers 0 (car $\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha} \sim \frac{t^{2-\alpha}}{2}$ en 0), d'où :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt.$$

Cette dernière expression montre que la fonction f est strictement positive sur $]0, 2[$.

8°) *Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2*

a) D'après les développements limités usuels, on a : $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(0) = 1/2$.

b) Comme $\varphi(0) > 0$, l'équation $\varphi(t) = 0$ équivaut à $\cos(t) = 1$, soit $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ avec $t \neq 0$.
Pour $t \in [0, \pi]$, l'équation $\varphi(t) = 0$ n'a donc pas de solution.
Comme φ est positive et ne s'annule pas sur $[0, \pi]$, on a $\varphi(t) > 0$ sur $[0, \pi]$ et le minimum de la fonction continue φ sur le compact $[0, \pi]$ est un réel strictement positif $\mu = \varphi(t_0) > 0$.

c) Puisque la fonction intégrée ci-dessous est positive, son intégrale sur $[0, +\infty[$ est supérieure à son intégrale sur $[0, \pi]$ et on a donc compte tenu de la minoration obtenue pour φ :

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt = \alpha \int_0^\pi \frac{1-\cos(t)}{t^2} \frac{dt}{t^{\alpha-1}} \geq \alpha\,\mu \int_0^\pi \frac{dt}{t^{\alpha-1}} \geq \alpha\,\mu\, \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

d) Cette dernière minoration tend vers $+\infty$ quand α tend vers 2.
Il en résulte que $\lim_{\alpha \to 2} f(\alpha) = +\infty$.

■ Partie IV : Calcul de l'intégrale $f(1)$

9°) *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) La fonction $t \longrightarrow \frac{\sin((2n+1)\,t)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et elle se prolonge par continuité par la valeur $2n+1$ en $t = 0$. Ainsi, l'intégrale I_n existe bien.

b) On a clairement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, et d'après les formules de trigonométrie usuelle :

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)\,t) - \sin((2n-1)\,t)}{\sin(t)}\, dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2n\,t)\, dt = 0.$$

On en déduit immédiatement que la suite $n \longrightarrow I_n$ est constante, égale à $\pi/2$.

c) Selon les développements limités usuels, on a : $t - \sin(t) \sim t^3 / 6$ quand t tend vers 0, et :

$$\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)} \sim \frac{t^3/6}{t^2} = \frac{t}{6}.$$

Il en résulte que $\lim_{t \to 0} \psi(t) = 0$.
Ainsi, la fonction φ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en posant $\psi(0) = 0$.

d) Compte tenu de l'égalité $I_n = \frac{\pi}{2}$, puis en posant $u = (2n+1)t$, il vient maintenant :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

10°) *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe C^1*

a) Puisque g est de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^{\pi/2} g(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = \left[-g(t)\,\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\pi/2} g'(t)\,\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Il en résulte que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t.$$

b) L'inégalité de la moyenne donne :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} |g'(t)|\,|\cos((2n+1)t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} |g'(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'après cette majoration, cette intégrale tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Ainsi, u_n est somme de deux termes qui tendent vers 0, et tend vers 0.

c) En admettant (ce qu'un calcul simple permettrait de vérifier) que la fonction ψ est C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En remplaçant u_n par son expression obtenue au 9°, on a donc :

$$\frac{\pi}{2} - \lim_{n \to +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = 0.$$

D'où finalement :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$
