VII Développement décimal illimité (rappels de MPSI)

Théorème

Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = N + 0,a_1 a_2 \dots = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

On a en outre $N = \lfloor x \rfloor$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$.

Définition

Une telle écriture est appelée **développement décimal illimité propre** de x.

Démonstration : Non exigible.

Remarquons qu'une telle série converge bien ($\mathrm{O}\left(10^{-n}\right)$).

De plus, si on considère cette série, et si l'on note $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de x), alors on sait déjà que $x_n \to x$.

Or $\dfrac{a_n}{10^n} = x_n - x_{n-1}$ donc la série est télescopique de somme $x - x_0 = x - \lfloor x \rfloor$.

De plus, la suite $(a_n)_n$ ne stationne pas sur 9 . Sinon, on considérant p tel que $10^p x$ a une partie décimale ne contenant que des 9, on obtient que $10^p x = 1$ donc $x = 10^{-p}$ et ainsi, si $n > p$, $a_n = \left\lfloor 10^n x \right\rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor = 0$, ce qui est contradictoire.

Cela donne l'existence.

Lemme

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} = 1$ avec pour tout n, $b_n \in [\![0,9]\!]$, alors, pour tout n, $b_n = 9$.

Démonstration

Soit $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots \in [0,1]$ tel que tous les b_n ne soient pas égaux à 9. Montrons que $x < 1$.

Soit n_0 le plus petit entier tel que $b_{n_0} \neq 9$ (donc $x = 0{,}99 \cdots 9 b_{n_0} b_{n_0+1} \cdots$) et

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n_0-1} b_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-n_0} = 0, b_1 \cdots b_{n_0-1} 9 = 0{,}\underbrace{9 \cdots 9}_{n_0 \text{ fois}}.$$

Alors $1 - x_0 = 10^{-n_0} > 0$ et comme $b_{n_0} \neq 9$, $x \leqslant x_0 < 1$. □

Pour l'unicité, si on a un telle écriture, alors

$$10^n x = 10^n N + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} = 10^n N + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}}$$

avec $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} \leqslant 1$. Par hypothèse et d'après le lemme, on a en fait $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} < 1$, et on obtient $\left\lfloor 10^n x \right\rfloor = 10^n N + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k}$ ce qui redonne facilement $a_n = \left\lfloor 10^n x \right\rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$.

$N = \lfloor x \rfloor$ en utilisant le lemme également. □

Remarque

Les seuls nombres réels à avoir deux développements décimaux illimités sont les nombres décimaux (d'après le lemme).