22 $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

$f : x \longmapsto \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt$

1) $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

(par opéra° sur $\mathbb{R}^*$

car $\operatorname{sh} t \sim t$ en 0)

φ est paire

et $\mathbb{R}$ centré en 0 et si $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \varphi(t)\,dt \underset{\substack{CV \\ u = -t \\ dt = -du}}{=} \int_x^{2x} \underbrace{\varphi(-u)}_{=\varphi(u)}(-du) = -f(x)$$

donc f est impaire.

2) Si Φ primitive de φ continue

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$

donc f dérivable et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x)$.

3) Si $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(2x) - \operatorname{sh} x}{x}$

$$= \frac{(e^{2x} - e^{-2x}) - (e^x - e^{-x})}{2x}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - 1)}{2x}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x\,(2\operatorname{ch} x - 1)}{x} \geqslant 0.$$

ou bien

Si $x>0$, $2x > x$

par strict $\nearrow$ de sh sur $\mathbb{R}^+$

$f' > 0$ sur $\mathbb{R}^+$

par imparité de f, $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^-$

(donc f' paire)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	1	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
	BPDAV				BPDAV

4_ Si $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \boxed{\frac{\operatorname{sh} t}{t}} dt \xrightarrow[+\infty]{} ?!?$$

$+\infty$??

$$\begin{cases} \operatorname{sh} t \geq \operatorname{sh} x \\ t \leq 2x \end{cases}$$

$$f(x) \underset{x<2x}{\geq} \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh} x}{2x} dt = (2x-x)\frac{\operatorname{sh} x}{2x} \to +\infty$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{2}$$

donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}$

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\operatorname{sh} x}{2x} \sim \frac{e^x}{4x} \longrightarrow +\infty$$

donc $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

5_ IPP

si $x>0$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\, dt$$

ch et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \left[\frac{\operatorname{ch} t}{t} \right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\, dt$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{ch} 2x}{2x} - \frac{\operatorname{ch} x}{x}} + \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\, dt$$

$\sim \frac{e^{2x}}{4x}$

négligeable ?

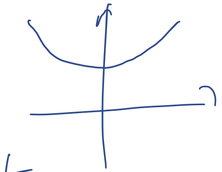
Or
$$\frac{\operatorname{ch} 2x}{2x} - \frac{\operatorname{ch} x}{x} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4x} - \frac{e^{x}+e^{-x}}{2x}$$

$$= \frac{(e^x)^2 - 2e^x - 2e^{-x} + e^{-2x}}{4x}$$

$-2e^x - 2e^{-x} + e^{-2x} \underset{+\infty}{=} o\left((e^x)^2\right)$

$$\sim \frac{e^{2x}}{4x}.$$

et



$$0 \le \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\, dt \le \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} 2x}{t^2}\, dt$$

$$\le \operatorname{ch} 2x \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x}$$

$$\le \operatorname{ch} 2x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \right)$$

$$\le \frac{\operatorname{ch} 2x}{2x} \sim \frac{e^{2x}}{2x}$$

trop grossier.

$$0 \le \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\, dt \le \frac{\operatorname{ch} 2x}{x^2} \times (2x - x)$$

$$= \frac{\operatorname{ch} 2x}{x} \sim \frac{e^{2x}}{x}$$

NON

$$0 \le \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\, dt \le \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{x^2}\, dt$$

$$\le \frac{\operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} x}{x^2} \sim \frac{e^{2x}}{x^2} = o\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)$$

comme précédemment

donc
$$\int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\, dt = o\left(\frac{e^{2x}}{x} \right)$$

donc $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{4x} + \underbrace{o\left(\dfrac{e^{2x}}{x}\right)}_{\text{équiv. du } [\ldots] + \ell' \int \ldots}$

donc $\boxed{f(x) \sim \dfrac{e^{2x}}{4x}}$.

d'où $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty \\ \dfrac{f(x)}{x} \sim \dfrac{e^{2x}}{4x^2} \to +\infty \end{cases}$

donc $\dfrac{f(x)}{x} \to +\infty$.

6. $DL_3(0)$ de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$

Or

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

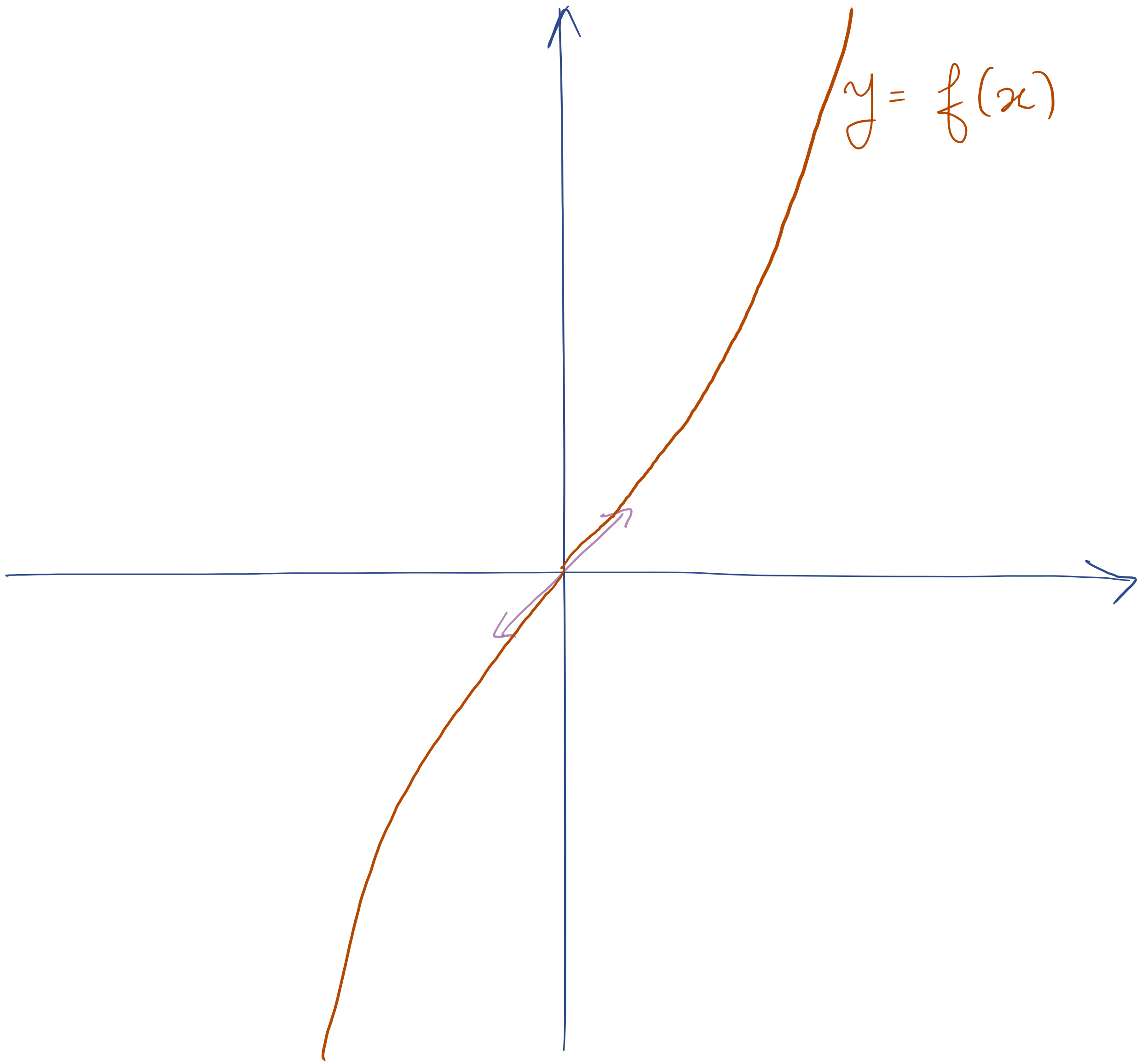
avec, par exemple, $\Phi(0) = 0$,

$$\Phi(x) = \underbrace{\Phi(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{18} + o(x^3)$$

donc

$$f(x) = \left(2x + \frac{(2x)^3}{18}\right) - \left(x + \frac{x^3}{18}\right) + o(x^3)$$

$$\underset{x \to 0}{=} x + \frac{7}{18}x^3 + o(x^3)$$



$$f(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{7}{18}x^3 \qquad \begin{array}{l} >0 \text{ en } 0^+ \\ <0 \text{ en } 0^- \end{array}$$

(28) $\ln(1+x)$ entre 0 et 1

But : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \longrightarrow \ln 2$

ITL $\quad \boxed{f \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1])}$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$A = \left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(1)^k \right| \leq \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \times \sup_{[0,1]} |f^{(n+1)}|$$

$$\left|f^{(n+1)}\right| : x \longmapsto \left| \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \right| = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \leq \frac{(n-1)!}{1}$$

donc $\displaystyle |A| \leq \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow 0.$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.}$$

$\frac{1}{1+x}$; $\frac{-1}{(1+x)^2}$; $\frac{2}{(1+x)^3}$; $\frac{-6}{(1+x)^4}$ ....