Séries de fonctions

- Il est absolument nécessairement de maîtriser les techniques d'étude des séries d'une part et des suites de fonctions d'autre part pour aborder ce TD.
- Problèmes de convergence :
  - ⋆ **Convergence simple** : il s'agit d'une étude classique de série, avec un paramètre. Rappelons qu'on peut utiliser
    - La convergence absolue : $\sum \|f_n(x)\|$ à ne pas confondre avec la convergence normale. Utilisation des relations de comparaison $\leqslant, o, O, \sim$).
    - La comparaison série-intégrale si $f_n(x) = g(n,x)$ avec $t \mapsto g(t,x)$ monotone (par rapport à t et non x).
    - Le théorème spécial sur les séries alternées.
    - Plus rarement : le calcul des sommes partielles.
  - ⋆ **Convergence normale** : celle qu'on recherche prioritairement, souvent même avant la convergence simple qu'elle implique (par convergence absolue) et la convergence uniforme. Une convergence normale sur tout segment (pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, sera généralisé aux compacts plus tard, on peut se contenter d'au voisinage de chaque point) est souvent suffisante.
  - ⋆ **Convergence uniforme** : On s'y intéresse seulement lorsqu'il n'y a pas convergence normale (éventuellement sur tout segment). Cela revient à avoir la convergence uniforme vers 0 des restes. Penser par exemple à la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées, ou à une comparaison série-intégrale.
- Étude de la fonction somme d'une série de fonction :
  - ⋆ **Continuité, classe** : on utilise le terme de transfert par convergence uniforme (sur tout segment).
  - ⋆ **Limites, équivalents** : penser au théorème de la double limite (attention, aux bornes de l'intervalle, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas.) S'il ne s'applique pas, on peut penser à une comparaison avec une intégrale.

    Pour les équivalents, c'est plus compliqué. On peut penser à la comparaison avec une intégrale, ou à sortir certains termes de la somme...
  - ⋆ **Intégration sur un segment** : il suffit d'avoir la convergence uniforme.

    Pour l'intégration sur des intervalles quelconques, nous verrons un théorème plus tard (convergence dominée).

1 CCINP 8

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

2 CCINP 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

3 CCINP 15 Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

4 CCINP 16 On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

5 CCINP 17 Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\right)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

6 **CCINP 18** On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

7 **suite de CCINP 18** Montrer que S est dérivable sur $\mathring{D}$. Calculer S', puis S et enfin $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

8 Continuité, dérivabilité, variations, limites de $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4 + n^2 x^2}$.

9 Démontrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

10 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-n}\cos(n^2 x)$, puis la dérivabilité de la somme de cette série de fonctions. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| \leqslant 10^{-3}.$$

11 Étudier la convergence simple, uniforme, normela de la série de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

Vérifier que sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

12 Étudier la convergence sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)$. Sa somme est-elle continue ?

13 **Oral des Mines** On pose $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 + n^2}$.

1. Domaine de définition de f.
2. Parité de f.
3. Continuité de f.
4. Limite en $+\infty$
5. La convergence est-elle uniforme ?

14

1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n + n^2 x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

15 Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = \mathrm{e}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f = g$.
5. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

16 **Fonction ζ de Riemann** On pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives comme sommes de séries de fonctions.
4. Étudier les variations de ζ.
5. Calculer la limite en $+\infty$.
6. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
7. Donner un équivalent en 1 en comparant à une intégrale.
8. On définit pour $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.
   Sur quels intervalles a-t-on convergence simple ? normale ? uniforme ?
9. Démontrer que $\phi : x \in \mathbb{R}_+^* \to \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
10. Montrer que si $x > 1$, $\phi(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.

17 Montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx} + \mathrm{e}^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

18 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathrm{Arctan}(x+n) - \mathrm{Arctan}(x)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercices vu en cours

19 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$

20 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

21 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\sum n^\alpha x\mathrm{e}^{-n^2x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Dans le cas contraire, préciser sur quels types d'intervalles il y a convergence normale.

22 Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

23 A-t-on convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x\mathrm{e}^{-n^2x^2}$?

24 Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de f.

25 **CCINP 53** On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

   $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

26 Soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et calculer de $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que la série convergence normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que la conclusion du théorème de la double-limite ne tient pas en 0^+.

27 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

28 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On note f la somme de la série.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer f'.
3. Étudier les variations de f.