Intégrales généralisées

- Sur un segment, il n'y a pas de problème d'intégrabilité : il suffit d'être continue par morceaux.
- Sur un intervalle borné, des prolongements par continuité peuvent résoudre les problèmes (intégrales faussement généralisées).
- S'il y a des problèmes d'intégrabilité en plusieurs points, on sépare l'intégrale en plusieurs morceaux et on les étudie séparément.
- De même qu'une convergence absolue de série se fait en étudiant le terme général et non les sommes partielles, une étude d'intégrabilité se fait en général en étudiant la norme (valeur absolue, module) de la fonction et non en manipulant l'intégrale en général.

  Exemple : intégrabilité de $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^3}$ sur $[1,+\infty[$: f est une fonction continue et positive sur $[1,+\infty[$ et $|f(t)| = f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc, par comparaison à une fonction de Riemann intégrable $(2>1)$, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Être intégrable en $+\infty$ ne signifie pas avoir une limite nulle (attention au parallèle avec les séries...)
- ... et avoir une limite nulle ne suffit pas pour être intégrable.
- L'intégrabilité n'est pas nécessaire pour avoir existence de l'intégrale sur un intervalle : on peut rencontrer des intégrales dites impropres ou semi-convergentes.
- Il est possible de faire des changements de variables en respectant bien les hypothèses (de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif) dans des intégrales généralisées, ce qui peut permettre de montrer la convergence.

  Quant aux intégrations par partie, la prudence est de mise : on passe sur des bornes fermées , on intègre par parties puis on prend la limite. Sinon, gare à l'apparition de deux termes qui n'existent pas !

  De la même manière, y réfléchir à deux fois avant d'écrire $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Pour l'intégration des relations de comparaisons, c'est le même principe que pour les séries.

Vrai ou faux

1. Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
2. Si $f \in \mathscr{C}([a,+\infty[)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f de limite nulle en $+\infty$.
3. Dire que « f est intégrable sur I », $\int_I f$ converge absolument ou encore $\int_I |f|$, c'est la même chose.
4. f positive est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ n'est jamais intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$.
6. Si deux fonctions sont équivalentes en $+\infty$, elles sont simultanément intégrables ou non intégrables sur $[a,+\infty[$.
7. Si f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et nulle.
8. Si $f,g \in \mathscr{C}^1(]a,b[)$, alors $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature.

1 CCINP 19

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t\,dt$.
2. Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ ~~et que~~ $\cancel{\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t\,dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}}$.

   ~~**Indication** : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.~~

2 CCINP 25

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. ~~Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pose~~ $\cancel{u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}}$. ~~Calculer~~ $\cancel{\lim_{n\to+\infty} u_n}$.

3 CCINP 26

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) ~~Déterminer la limite de la suite~~ $\cancel{(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$.
3. ~~La série~~ $\cancel{\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n}$ ~~est-elle convergente ?~~

4 CCINP 28

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.

   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

5 CCINP 29

On pose : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. ~~Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.~~

6 Étudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{1} (-\ln t)^{\alpha}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan t\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
12. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{(\ln t)^{\alpha}}{t^{\beta}}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(t)\,\mathrm{d}t$ où P fonction polynomiale
15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\,\mathrm{d}t$
17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{t}+t^2\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$
18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{\left(1+t^2\right)^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
19. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(-\ln t)^{\alpha}}{(1-t)^{\beta}}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

7 Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t^3-t}\,\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)\left(t^2+b^2\right)}\,\mathrm{d}t$ où $0<a<b$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t+1}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t$

8

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue admettant une limite ℓ en $+\infty$ et $a>0$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} a\ell$ puis montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f(t+a)-f(t)\right)\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa limite.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\operatorname{Arctan}(t+1)-\operatorname{Arctan} t)\,\mathrm{d}t$

9 **Calcul de l'intégrale de Dirichlet** $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que I converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle A_n=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle B_n=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t.$
   Montrer que $A_n \leqslant I_n \leqslant B_n$.
3. Calculer $C_n = A_{n+1}-A_n$, $C_{n+1}-C_n$ et A_n-B_n.
   En déduire les valeurs de C_n puis A_n puis B_n.
4. Montrer que $\displaystyle\frac{I_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$ et conclure.

10 Soit $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} \frac{t\operatorname{Arctan} t}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que I est convergente.
2. Montrer que $\displaystyle F : x \mapsto \int_{1/x}^{x} \frac{t\operatorname{Arctan} t}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer I.

11 Soit $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t.$
3. Calculer I.
4. Montrer que $\displaystyle J=\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
5. Montrer que $\displaystyle K=\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

12 Déterminer un équivalent de Arccos en 1.

13 Soit $\displaystyle f : x \mapsto \int_0^{x} \ln(\ln(1+t))\,\mathrm{d}t.$

Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer un équivalent simple de f en 0.

14 Quelle est la nature de $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$?

Donner un développement asymptotique de $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$.

15 Pour $x, y\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $\displaystyle G(x,y)=\int_0^{y} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $G(x,y)$ est bien définie et que pour x fixé, $G(x,y)$ tend vers une limite $G(x)$ lorsque $y\to+\infty$.
2. Montrer que $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ G(n,y)=\frac{1}{n}\left(\int_0^{n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t-\int_y^{y+n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$
3. On note $H(n)=nG(n)$. Montrer que la série de terme général $\displaystyle H(n+1)-H(n)-\frac{1}{2n}$ converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

16 Montrer que $\displaystyle I=\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.