SUITES DE FONCTIONS

- Pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$, on commence par la convergence simple qui donne une fonction limite f. Puis
  - ⋆ Soit on veut montrer qu'il y a convergence uniforme
    - on majore uniformément $\|f_n(x)-f(x)\| \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$ indépendant de x convergent vers 0
    - Ou on trouve $\|f_n-f\|_\infty$ par une étude de fonction (cas des fonctions numériques) et on montre qu'elle tend vers 0
    - Pour une convergence sur tout segment, on cherche une majoration analogue à la précédente en utilisant les bornes du segment.
  - ⋆ Soit on veut montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme et on peut
    - Exhiber une suite (x_n) telle que $f_n(x)-f(x_n) \not\to 0$.
    - Montrer que f est non bornée ou non continue alors que les f_n le sont, ou que l'intégrale sur un segment des f_n ne converge pas vers l'intégrale de f.
- Et donc, avec des hypothèses à connaître, le caractère borné, la continuité, l'intégrale sur un segment se transmette par convergence uniforme. On peut aussi échanger des limite avec l'hypothèse de convergence uniforme.
- Savoir aussi qu'on peut approcher uniformément sur un segment des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier et des fonctions continues par des polynômes (théorème de Weierstraß).
- Les propriétés définies à partir d'égalités ou d'inégalités larges se transmettent par convergence simple : positivité, monotonie, lipschitziannité (à rapport constant), linéarité.

1 CCINP 9

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

2 CCINP 10

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer la limite lorsque $n\to+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

3 CCINP 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\left(f_n(x_n)-f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

4 CCINP 12

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0;1]$, $g_n(x)=x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

5 CCINP 13

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{si } |x|\leqslant\frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x|>\frac{1}{n} \end{cases}$$

   Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

6

Étudier la convergence des suites de fonctions

1. $f_n : x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\mapsto\sqrt{n}\cos^n x\sin x$.
2. $g_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4}$.
3. $h_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\dfrac{2^nx}{1+n2^nx^2}$.
4. $i_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.
5. $j_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\sin\left(\dfrac{n+1}{n}x\right)$.

7 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^p\left(1 + n^\alpha e^{-nx}\right)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p > \alpha$.
3. Déterminer le limite pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 x^5\left(1 + n^4 e^{-nx}\right) dx$.

8 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}$.

9 Soit (f_n) une suite de fonctions (à valeurs vectorielles) qui converge uniformément vers une fonction f, (g_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g.

Vérifier que $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$.

Donner une condition suffisante simple portant sur h (à valeurs dans $\mathbb{K}$) pour que la suite de fonction (hf_n) converge uniformément vers hf.

10 Montrer que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce segment.

11 Théorème de Weierstraß par les polynômes de Bernstein

Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définie les fonctions polynômes de Bernstein associées à f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définie sur $[0,1]$, par $B_n(f) : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u)$ où $u : x \mapsto 1$.
2. Que vaut, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k}$? En déduire $B_n(\mathrm{id})$.
3. Calculer de même $B_n(v)$ où $v : s \mapsto x^2$.
4. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout x dans $[0,1]$, $|f(x)| \leqslant M$.
   (b) Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel si $x, x' \in [0,1]$, $|x - x'| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Pour $x \in [0,1]$, on note $A_x = \left\{k \in [\![0,n]\!],\ \left|\dfrac{k}{n} - x\right| \leqslant \eta\right\}$ et B_x le complémentaire de A_x dans $[\![0,n]\!]$.
   (c) Montrer que
   $$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k\in A_x} \binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B_x}\binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta^2} x^k (1-x)^{n-k}.$$
   (d) En déduire que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{M}{2n\eta^2}$.
5. Conclure.

12 Preuve du théorème de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $a \in \overline{I}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.

1. Montrer que si $a \in I$, on a bien $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$ en appliquant un théorème de continuité.
2. Montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geqslant N$, il existe un voisinage de a (qui dépend de n) sur lequel $|b_n| \leqslant 2 + |f(x)|$.
3. Montrer que f est bornée au voisinage de a.
4. En déduire que (b_n) est bornée et qu'elle a une valeur d'adhérence b.
   Soit φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une majoration de $|b_n - b|$ faisant intervenir b_n, b_{φ_n}, b, $f_n(x)$, $f_{\varphi(n)}(x)$, $f(x)$ où $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ et en déduire qu'il y a un rang à partir duquel $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$.
6. En déduire que $b_n \to b$ et conclure à l'aide de prolongements par continuité.

13 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On veut montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer le résultat si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer le résultat pour f continue en utilisant des fonctions polynomiales.
3. Montrer le résultat si f en escalier, puis continue par morceaux.

On peut remplacer $\sin(nt)$ *par* $\cos(nt)$ *ou* e^{int}.

14 Que peut-on dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$?

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes, alors f est un polynôme.

15 En utilisant le théorème de Weierstraß, montrer que si $f \in \mathscr{C}([a,b]),\mathbb{K})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\,dt = 0$, alors f est la fonction nulle.