Mines - Ponts - Maths 1 - MP - 2017

1_ $\mathcal{P} = \text{Vect}\,(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $f_k : x \mapsto x^k \in \mathcal{E}$

donc $\boxed{\mathcal{P} \text{ sev de } \mathcal{E}.}$

2_ Si $f \in \mathcal{E}$, f, f' sont continues donc pour tout $x \in I$, c'est aussi le cas de $t \mapsto f(\underbrace{x\sin(t)}_{\in I})$ et $t \mapsto f'(\underbrace{x\sin(t)}_{\in I})$ par continuité de sin sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Donc $\boxed{u(f) \text{ et } v(f) \text{ sont définis}}.$

$u(f), v(f) \in \mathcal{E}$ admis. Reste à voir la linéarité, qui ne pose pas de problème :

si $f, g \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$\forall x \in I$,

$$u(f+\lambda g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (f(x\sin t) + \lambda g(x\sin t))\,dt$$

$$= u(f)(x) + \lambda u(g)(x) \quad \text{par linéarité de } \int.$$

Puis, par linéarité de la dérivation, c'est aussi le cas pour v.

Finalement, $\boxed{u, v \in \mathcal{L}(\mathcal{E}).}$

3_ Pour montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u, v, il suffit de le vérifier sur la base $\mathcal{B} = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$.

Or, si $k \in \mathbb{N}$, $u(f_k) : x \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^k \sin^k t\,dt = \frac{2}{\pi} W_k x^k$

donc $u(f_k) \in \mathcal{P}$

et $v(f_k) : x \mapsto \cancel{x^k} + x\int_0^{\pi/2} k\, x^{k-1} \sin^{k-1} t\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ k W_{k-1} x^k & \text{sinon} \end{cases}$

donc $v(f_k) \in \mathcal{P}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{P} \text{ stable par } u \text{ et } v.}$

4_ Classique : intégrales de Wallis.

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t \, dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^{n+1} t}_{\downarrow} \overbrace{\sin t}^{\uparrow} \, dt$$

intégration par parties, $\sin^{n+1}$ et $\cos$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

$$W_{n+2} = \underbrace{\left[-\sin^{n+1} t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n t \underbrace{\cos^2 t}_{=1-\sin^2 t} \, dt$$

$$= (n+1) \left[W_n - W_{n+2} \right] \quad \text{donc} \quad \boxed{(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n.} \quad (*)$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (n+1) W_{n+1} W_n$: la suite est constante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1) W_{n+1} W_n = 1 \times W_1 \times W_0$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt \times \int_0^{\pi/2} 1 \, dt$$

$$= 1 \times \frac{\pi}{2}.$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}}$.

5_ Classique bis.

Si $n \in \mathbb{N}$, $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin t) \sin^n t \, dt$

avec $t \mapsto (1-\sin t)\sin^n t$ continue, positive et non constamment nulle

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n - W_{n+1} > 0$ ie $\boxed{(W_n)_n \text{ strict. décroissante.}}$

Comme elle est positive, elle converge vers l et par 4), $l^2 = 0$ donc $l = 0$

$\boxed{W_n \to 0}$ (en particulier, $W_n > 0$)

puis $W_n \sim W_{n+2}$ par $(*)$ et $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ donc $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$

donc par encadrement $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$ donc $W_{n+1} \sim W_n$.

Puis par 4), $W_n^2 \sim W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$ 3

donc finalement, $\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$ (et on retrouve $W_n \to 0$).

6- $|f|$ est continue sur le <u>Segment</u> I donc atteint son max.

$\boxed{M(f) \text{ bien défini.}}$

Comme $u \in \mathcal{L}(E)$, on cherche $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall f \in E, \quad M(u(f)) \leq C\, M(f)$$

Or, si $x \in I$,

$$|u(f)(x)| \underset{0 \leq \frac{\pi}{2}}{\leq} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(\underbrace{x\sin t}_{\in I})|\, dt$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} M(f) = \underbrace{M(f)}_{\text{ne dépend pas de } x.}$$

donc $M(u(f)) \leq M(f)$

et $\boxed{u \text{ est continue de } (E, M) \text{ dans lui-même.}}$

7_ Soit $f_n : x \mapsto x^n$. alors $M(f_n) = a^n$ et avec 3), (4)
$\underline{n \geqslant 1}$

$$M(v(f_n)) = n\, W_{n+1}\, a^n .$$

donc $\dfrac{M(v(f_n))}{M(f_n)} = n\, W_{n+1} \underset{5}{\sim} n\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} = \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}} \to +\infty$.

donc on ne peut pas trouver $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$\forall f, M(v(f)) \leq C M(f)$

donc $\boxed{v \text{ n'est pas continue sur } (\mathcal{E}, M).}$

8_ • $\forall f \in \mathcal{E}$, $N(f) = M(f) + M(f') \geqslant 0$.

• Si $N(f) = \underbrace{M(f)}_{\geqslant 0} + \underbrace{M(f')}_{\geqslant 0} = 0$, alors $M(f) = M(f') = 0$

et comme M norme, $f = 0$.

• Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{E}$, $N(\lambda f) = M(\lambda f) + M(\lambda f')$

$= |\lambda| M(f) + |\lambda| M(f')$ car M norme

$= |\lambda| N(f)$.

• Si $f, g \in \mathcal{E}$,

$N(f+g) = M(f+g) + M(f'+g') \underset{M \text{ norme}}{\leq} M(f) + M(g) + M(f') + M(g')$

$\leq N(f) + N(g)$

donc $\boxed{N \text{ norme sur } \mathcal{E}.}$

Si $f \in \mathcal{E}$, $x \in I$,

$$|v(f)(x)| \leq |f(0)| + |x| \int_0^{\pi/2} M(f')\,dt$$
$$\leq M(f) + a \times \frac{\pi}{2} M(f')$$
$$\leq \max\left(1, \frac{a\pi}{2}\right) \times \left(M(f) + M(f')\right)$$
$$\leq \underbrace{C\,N(f)}_{\text{ne dépend pas de } x} \quad \text{avec} \quad C = \max\left(1, a\frac{\pi}{2}\right)$$

donc $M(v(f)) \leq C N(f)$

donc $\boxed{v : (\mathcal{E}, N) \longrightarrow (\mathcal{E}, M) \text{ continue.}}$

et donc vu la qu. précédente, $\boxed{\text{N et M ne sont pas équivalents.}}$

9_ $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. f étant continue sur le segment I, le thm de Weierstraß nous assure de l'existence de $q \in \mathcal{P}$ tel que $\|f' - q\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit p l'unique fonction polynomiale primitive de q telle que $p(0) = f(0)$. Alors $p \in \mathcal{P}$ et $\|f' - p'\|_\infty \leq \varepsilon$

Mais alors, si $x \in I$,

$$|f(x) - p(x)| = \left|\int_0^x (f'(t) - p'(t))\,dt\right| \leq |x| \times \|f' - p'\|_\infty \leq a\,\varepsilon.$$

donc $N(f-p) = M(f-p) + M(f'-p') \leq a\varepsilon + \varepsilon = (a+1)\,\varepsilon$.

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ (on peut poser $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{a+1}$ avec $\varepsilon' > 0$ qcq) et $p \in \mathcal{P}$, on a bien que $\boxed{\mathcal{P} \text{ dense dans } (\mathcal{E}, N)}$.

On peut aussi construire $(p_n)_n \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ telle que $p_n \xrightarrow{N} f$ avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ ...

6

10_ Il suffit d'étudier l'image de la base canonique

$f_n : x \mapsto x^n$.

D'après 3., $u(f_n) = \frac{2}{\pi} W_n f_n$

Cas $n \neq 0$:

donc $v \circ u(f_n) = \frac{2}{\pi} W_n v(f_n)$ par linéarité

$= \frac{2}{\pi} W_n \times n W_{n-1} f_n$

$= f_n$ d'après 4.

et $v \circ u(f_0) = \frac{2}{\pi} W_0 v(f_0) = \frac{2}{\pi} W_0 = 1 = f_0$.

donc $\widetilde{v \circ u}$ et id sont linéaire et coïncident sur une base

donc $\boxed{\widetilde{v \circ u} = id_{\mathcal{P}}.}$ où $\widetilde{v \circ u}$ est l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathcal{P}$.

Puis si $n \neq 0$, $u \circ v(f_n) = u(n W_{n-1} f_n)$

$= n W_{n-1} \, u(f_n)$

$= n W_{n-1} \frac{2}{\pi} W_n f_n$

$= f_n$ de même.

et $u \circ v(f_0) = u(f_0) = \frac{2}{\pi} W_0 f_0 = f_0$

donc de même, $\boxed{\widetilde{u \circ v} = id_{\mathcal{P}}.}$

11_ Si $f \in \mathcal{E}$, $x \in I$,

$u \circ v(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} v(f)(x \sin t)\, dt$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(f(0) + x \sin t \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t \sin u)\, du \right) dt$

$= f(0) + x \int_0^{\pi/2} \sin t \left(\int_0^{\pi/2} f'(x \sin t \sin u)\, du \right) dt$

N'est pas facile à calculer directement... Utilisons 9. et 10.

La densité de $\mathcal{P}$ dans $(\mathcal{E}, N)$ nous fournit une suite $(p_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}$ tels que $p_n \xrightarrow{N} f$.

Comme $v : (\mathcal{E}, N) \longrightarrow (\mathcal{E}, M)$ continue, (8.) et comme $N(p_n - f) \to 0$,

$M(v(p_n) - v(f)) \longrightarrow 0$.

Mais $u : (\mathcal{E}, M) \longrightarrow (\mathcal{E}, M)$ continue (6), on a

alors $M(u\circ v(p_n) - u\circ v(f)) \longrightarrow 0$.

Autrement dit, $u\circ v(p_n) \xrightarrow{M} u\circ v(f)$.

Mais d'après 10., $u\circ v(p_n) = p_n \xrightarrow{N} f$.

Et la définition de N nous donne que

$\forall f \in \mathcal{E}, \quad M(f) \leq N(f)$

et donc $p_n \xrightarrow{M} f$ également.

Par unicité de la limite, on a alors $u\circ v(f) = f$.

donc $\boxed{u\circ v = id_{\mathcal{E}}}$.

En particulier, v est injectif et $\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } v.}$

(Sinon, on aurait $f \neq 0$ tel que $v(f) = 0$ et alors $\underset{\substack{\| \\ u(0) = 0}}{u\circ v(f)} = f$ <u>non</u>.)

---

12. Cette question a échappé à ma vigilence : on a besoin d'un résultat que l'on n'a pas encore vu (oups), à savoir que sous certains conditions, on peut dériver "sous l'intégrale".

Admettons-le.

$[u(f)]' : x \longmapsto \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \, f'(x \sin t) \, dt$.

Il n'est de nouveau pas raisonnable de calculer directement $v\circ u(f)$. On reprend une suite $(p_n)_n \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$p_n \xrightarrow{N} f \text{ avec } \forall n\in\mathbb{N},\ p_n(0)=f(0) \quad (\text{qu. } 9)$$

donc en particulier $p_n \xrightarrow{M} f$ (rappel : M = norme uniforme)

Mais $v\circ u(f) : x \mapsto \underbrace{u(f)(0)}_{=f(0)=p_n(0)} + x\int_0^{\pi/2} (u(f))'(x\sin t)\,dt$

donc, $\forall x\in I$,

$$|v\circ u(p_n)(x) - v\circ u(f)(x)| \leq |x| \int_0^{\pi/2} |(u(p_n))'(x\sin t) - (u(f))'(x\sin t)|\,dt$$

$$\leq \underbrace{a \times \frac{\pi}{2} \times M\big((u(p_n))' - (u(f))'\big)}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

donc $M(v\circ u(p_n) - v\circ u(f)) \leq a\frac{\pi}{2} M((u(p_n))' - (u(f))')$

Mais $\left|(u(p_n))'(x) - (u(f))'(x)\right| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2} \sin t\,(p_n' - f')(x\sin t)\,dt\right|$

$$\leq \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \times M(p_n' - f').$$

donc $M((u(p_n))' - (u(f))') \leq M(p_n' - f')$

et $M(v\circ u(p_n) - v\circ u(f)) \leq a\times\frac{\pi}{2}\times M(p_n' - f') \leq \frac{a\pi}{2} N(p_n - f)$

Mais comme $p_n \xrightarrow{N} f$, on en déduit que

$$v\circ u(p_n) \xrightarrow{M} v\circ u(f).$$

Comme, par ailleurs, $v\circ u(p_n) = p_n \xrightarrow{M} f$, par unicité de la limite, $v\circ u(f) = f$ ie $\boxed{v\circ u = id_E.}$ (ouf !)

donc $v \circ u = u \circ v = id_E$: $\boxed{u, v \text{ inverses l'un de l'autre.}}$

---

13. $\boxed{\text{Si } f \text{ paire (resp. impaire), on a directement que } u(f) \text{ l'est.}}$

$\boxed{\text{Si } f \text{ est paire, alors } v(f) \text{ l'est aussi}}$ car f' impaire et vu la présence du x devant l'intégrale.

Donc, $\boxed{\text{si } u(f) \text{ paire, } f = v \circ u(f) \text{ est paire.}}$

$\boxed{\text{Si } f \text{ est impaire,}}$ comme $f(0)=0$, f' paire et $\boxed{v(f) \text{ impaire.}}$

$\boxed{\text{Si } v(f) \text{ paire, } f = u(v(f)) \text{ est paire.}}$

Si $u(f)$ impaire, $f = v(u(f))$ est impaire.
Si $v(f)$ impaire, $f = u(v(f))$ est impaire.

---

14. Si $f \neq 0$ vecteur propre associé à λ pour v,

alors $v(f) = \lambda f$ donc $\underbrace{u \circ v(f)}_{f} = \lambda u(f)$

donc $\lambda \neq 0$ et $u(f) = \frac{1}{\lambda} f$ donc $\frac{1}{\lambda}$ valeur propre de u (car $f \neq 0$).

Par symétrie des rôles, on a bien $\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } u \text{ ssi } \frac{1}{\lambda} \text{ valeur propre de } v}$

De plus, $\boxed{\text{les vecteurs propres sont les mêmes.}}$

---

15. Comme $|f^{(n)}|$ est continue sur le segment I, $\boxed{M_n \text{ défini.}}$

On a $u(f) = \lambda f$.

Et (2e oups...), on démontre avec des outils que l'on verra bientôt (...) que $[u(f)]^{(n)} : x \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, f^{(n)}(x \sin t) \, dt$.
(de nouveau : dériver sous $\int$...)

si $x \in I$,

donc $|u(f)^{(n)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} m_n \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^n t}_{\geq 0}\, dt = \frac{2}{\pi} m_n W_n$. (10)

$$\begin{array}{c} \| \\ |\lambda f^{(n)}(x)| \end{array}$$

donc $\boxed{|\lambda|\, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} m_n W_n.}$

Montrer que $f \in \mathcal{P}$ revient à montrer qu'il existe un rang à partir duquel $f^{(n)} \equiv 0$.

Or $\lambda \neq 0$ d'après un raisonnement analogue de celui de la question 11 appliqué à u (avec $v \circ u = id_E$),

donc $\forall x \in I$, $|f^{(n)}(x)| \leq \underbrace{\frac{2 m_n W_n}{\pi |\lambda|}}_{\text{ne dépend pas de } x}$

donc $m_n \leq \frac{2 m_n W_n}{\pi |\lambda|}$

donc $m_n \Big[\underbrace{\frac{2W_n}{\pi|\lambda|} - 1}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \text{ vu 5.}}\Big] \geq 0$ donc à partir d'un certain rang, $m_n \leq 0$ donc à partir d'un certain rang, $m_n = 0$. (apcr)

finalement, apcr, $f^{(n)} \equiv 0$ donc (en primitivant n fois),

$\boxed{f \in \mathcal{P}.}$

16_ Vu la question 3., les $f_n : x \mapsto x^n$ sont tous des vecteurs propres de u et de v. En se restreignant aux fonctions polynomiales de degré au plus n, donc en dimension $n+1$ (on vérifie facilement

la stabilité d'un tel espace par u et v avec la qu. 3), on obtient $n+1$ valeur propres distinctes : les $\frac{2}{\pi}W_k$ pour $k \in [\![0;n]\!]$ pour u et les kW_{k-1} pour $k \in [\![1;n]\!]$ ainsi que 1 pour v.
Il ne peut y en avoir d'autre car on est en dimension finie $n+1$ et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.
(On utilise le fait que tous les vecteurs propres sont polynomiaux.)

Finalement,

- Les valeurs propres de u sont les $\frac{2}{\pi}W_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs propres sont les $x \mapsto \alpha x^n$ pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Les valeurs propres de v sont les nW_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi que 1 et les vecteurs propres sont les $x \mapsto \alpha x^n$ pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Est-ce cohérent avec 14. ? oui car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ vu 4.

17_ Les vecteurs propres étant dans $\mathcal{P}$, $\boxed{\mathcal{E} \text{ ne possède pas de base de vecteurs propres de } u \text{ (ou de } v\text{, c'est pareil).}}$

L'ensemble des valeurs propres de u est $\left\{\frac{2}{\pi}W_n ;\ n \in \mathbb{N}\right\} = S_u$

Or $\frac{2}{\pi}W_n \longrightarrow 0 \notin S_u$ donc $\boxed{S_u \text{ n'est pas fermé.}}$

L'ensemble des valeurs propres de v est $\{nW_{n-1} ;\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1\} = S_v$

soit $S_v = \left\{\frac{\pi}{2W_n} ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$, avec $\frac{\pi}{2W_n} \longrightarrow +\infty$.

Une suite d'éléments de S_v convergente est bornée, donc elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (sinon, on aurait une suite extraite de $\frac{\pi}{2W_n}$ en ordonnant les termes, donc non bornée.) Cette suite est nécessairement stationnaire, donc sa limite est dans $\boxed{S_v \text{ qui est fermé.}}$

Remarque : en dimension infinie, il est abusif de parler du spectre.