CORRIGÉ MATHS 1 MP CENTRALE 1998

I.A – Comme $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ (f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}\geqslant 0$, $\boxed{f+g \text{ est AM.}}$

Comme $f\times g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ et, d'après la formule de Leibniz, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ (f\times g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\geqslant 0$, $\boxed{f\times g \text{ est AM.}}$

Si f,g sont CM sur $]a,b[$, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ et

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ (-1)^n(f+g)^{(n)}=(-1)^n f^{(n)}+(-1)^n g^{(n)}\geqslant 0,$$

$\boxed{f+g \text{ est CM.}}$

Puis $f\times g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ et, d'après la formule de Leibniz,

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ (-1)^n(f\times g)^{(n)}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f^{(k)}(-1)^{n-k}g^{(n-k)}\geqslant 0,$$

$\boxed{f\times g \text{ est CM.}}$

I.B – Soit f est une fonction AM sur $]a,b[$. Alors $\mathrm{e}^f\in\mathscr{C}^\infty(]a,b[)$.
Montrons par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$ que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \left(\exp f\right)^{(n)}\geqslant 0$.
Si $n=0$, $\exp f\geqslant 0$.
Si, l'hypothèse est vraie jusqu'à un $n\geqslant 0$, alors

$$\left(\exp f\right)^{(n+1)}=\left((\exp f)'\right)^{(n)}=\left(f'\exp f\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}(\exp f)^{(k)}\geq 0$$

d'après le caractère AM de f et l'hypothèse (forte) de récurrence. Ce qui établit la récurrence.

Finalement, $\boxed{\exp f \text{ est AM.}}$

I.C – Comme f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$, g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-b,-a[$ par opérations.
De plus, par récurrence sur n, on a $\forall\, x\in]-b,-a[,\ \ g^{(n)}(x)=(-1)^n f^{(n)}(-x)$ soit $\forall\, x\in]a,b[,\ \ f^{(n)}(x)=(-1)^n g^{(n)}(-x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est AM sur }]a,b[\text{ si et seulement si } g \text{ est CM sur }]-b,-a[.}$

I.D.1) On a $-\ln$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et on démontre par récurrence (il faut la poser !!) que si $n\geqslant 1$, $(-\ln)^{(n)}:\ x\mapsto(-1)^n\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.
On a donc $(-1)^0(-\ln)^{(0)}=-\ln\geqslant 0$ sur $]0,1[$ et si $n\geqslant 1$,

$$(-\ln)^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n}\geqslant 0$$

sur $]0,1[$. D'où $\boxed{-\ln \text{ CM sur }]0,1[.}$

I.D.2)

(i) $f>0$, $g=\ln f:\ x\mapsto -\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)+\ln(1-x)\right)$. $\boxed{g\in\mathscr{C}^\infty(]0,1[)}$ par opérations.

$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \ g^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!}{2}\left(\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^n}+\dfrac{1}{(1-x)^n}\right)}$ comme à la question précédente.

(ii) $g \geqslant 0$ car $\forall\, x \in]0,1[,\quad f \geqslant 1$.

Puis, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!\,((1+x)^n + (-1)^n(1-x)^n)}{2(1-x^2)^n} \geqslant 0$: c'est immédiat si n est pair, et c'est dû à la croissance de $X \mapsto X^n$ sur $\mathbb{R}^+$ sinon.

Donc g est AM sur $]0,1[$, puis, d'après 3., $\boxed{f \text{ est AM sur }]0,1[.}$

I.D.3) Arcsin $\geqslant 0$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\text{Arcsin}' = f$.

Vu la question précédente, $\boxed{\text{Arcsin est AM sur }]0,1[.}$

I.D.4) tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, par récurrence, $\tan^{(0)} = \tan = p_0(\tan)$ avec $p_0 = X \in \mathbb{N}[X]$. Si pour un $n \geqslant 0$, $\tan^{(n)} = p_n(\tan)$ avec $p_n \in \mathbb{N}[X]$,

$$\tan^{(n+1)} = \left(\tan^{(n)}\right)' = \tan'\, p_n'(\tan) = (1+\tan^2)p_n'(\tan) = p_{n+1}(\tan)$$

avec $p_{n+1} = (1+X^2)p_n' \in \mathbb{N}[X]$ car la dérivée et le produit de polynômes à cœfficients entiers naturels sont bien des polynômes à cœfficients entiers naturels. Ce qui établit la récurrence.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \tan^{(n)} = p_n(\tan) \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ où } p_n \in \mathbb{N}[X].}$

Comme $\tan \geqslant 0$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\boxed{\tan \text{ est AM sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.}$

I.E.1) $f \geqslant 0$ et $f' \geqslant 0$ donc f est croissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda = \lim_{a^+} f.}$

$f \in \mathscr{C}^1(]a,b[)$, $f \in \mathscr{C}^0([a,b[)$ et comme ci-dessus, f' a une limite en a^+. D'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ (limite de la dérivée), $\boxed{f \in \mathscr{C}^1([a,b[).}$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } a \text{ et } f' \text{ est continue à droite en } a.}$

I.E.2) On applique le raisonnement qui précède par récurrence car chaque $f^{(n)}$ est encore AM sur $]a,b[$.

$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty([a,b[) \text{ et pour tout } n\ f^{(n)}(a) \geqslant 0}$ par passage des inégalités à la limite.

$\boxed{\text{C'est faux en } b}$ en général : par exemple pour tan en $\dfrac{\pi}{2}$.

(Suite du corrigé de Ph. Château)

I.F

I.F.1 μ est croissante car $f \leqslant g \Rightarrow g - f \geqslant 0 \Rightarrow \mu(g-f) \geqslant 0 \Rightarrow \mu(f) \leqslant \mu(g)$.
$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, donc $-\mu(|f|) \leqslant \mu(f) \leqslant \mu(|f|)$.

I.F.2 $f \leqslant f_0 \|f\|_\infty$, donc $\mu(f) \leqslant \mu(f_0)\|f\|_\infty$.

I.F.3 $e_x \geqslant 0 \Rightarrow \tilde{\mu}(x) = \mu(e_x) \geqslant 0$.
$x \leqslant y \Rightarrow e_x \geqslant e_y \Rightarrow \tilde{\mu}(x) \geqslant \tilde{\mu}(y)$.

Si $x \leqslant y$, $0 \leqslant e^{-xt} - e^{-yt} = \displaystyle\int_x^y t e^{-ut}\,du \leqslant y e^{-xt}(y-x) \leqslant b e^{-a^2}(y-x)$, donc $\forall x, y,\ \|e_x - e_y\|_\infty \leqslant b e^{-a^2}|x-y|$.

Par suite, $|\tilde{\mu}(x) - \tilde{\mu}(y)| \leqslant \mu(f_0)\|e_x - e_y\|_\infty \leqslant \mu(f_0) b e^{-a^2}|x-y|$, donc $\tilde{\mu}$ est lipschitzienne, donc continue.

I.F.4 $x \leqslant y \Rightarrow e_{n,x} \geqslant e_{n,y} \Rightarrow \phi(x) \geqslant \phi(y)$.
Par convexité de l'exponentielle, on a $e^{-u} \geqslant 1 - u$.

$0 \leqslant e^{-u} - 1 + u = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n!} \leqslant u^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u|^n}{(n+2)!} \leqslant u^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u|^n}{2n!} = \frac{u^2}{2} e^{|u|}$ car $(n+2)! \geqslant 2n!$.

$\phi(x+h)-\phi(x)+h\mu(e_{n+1,x})=\mu(f)$ avec $f(t)=t^n e^{-xt}(e^{-ht}-1+ht)$. Pour $t\in[a,b]$, $0\leqslant f(t)\leqslant t^n e^{-xt}e^{|h|t}h^2t^2/2\leqslant Ch^2$, où C est une constante, donc $\left|\dfrac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}+\mu(e_{n+1,x})\right|\leqslant\mu(f_0)C|h|\xrightarrow[h\to 0]{}0$, donc ϕ est dérivable et $\phi'(x)=-\mu(e_{n+1,x})$.

I.F.5 Par récurrence, $\tilde\mu$ est de classe C^n et $\tilde\mu^{(n)}(x)=(-1)^n\mu(e_{n,x})$. Il est du signe de $(-1)^n$, donc $\tilde\mu$ est CM.

I.F.6 Si on prend $\mu_1(f)=f(c)$ (où $c\in[a,b]$), on obtient $\tilde\mu_1(x)=e^{-cx}$.
Si on prend $\mu_2(f)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, on obtient $\tilde\mu_2(x)=\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$.

Partie II

II.A

II.A.1 Par Taylor avec reste intégral, $R_n(f,x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,du$. $f^{(n+1)}$ étant croissante, si $0\leqslant x\leqslant y$, on déduit de la 2ème égalité que $\dfrac{R_n(f,x)}{x^n}\leqslant\dfrac{R_n(f,y)}{y^n}$.
Par formule de Taylor-Young, $R_n(f,x)/x^n$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

II.A.2 D'après A.1, $R_n(f,x)\geqslant 0$ sur $[0,b[$ donc la somme partielle de la série à termes positifs $\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est majorée par $f(x)$, elle converge donc et sa somme $g(x)$ est inférieure à $f(x)$.

II.A.3 Pour $x\in[0,b[$, on choisit y tel que $x<y<b$. On a $0\leqslant\dfrac{R_n(f,x)}{x^n}\leqslant\dfrac{R_n(f,y)}{y^n}\leqslant\dfrac{f(y)}{y^n}$, d'où $0\leqslant R_n(f,x)\leqslant\left(\dfrac{x}{y}\right)^n f(y)$, d'où $R_n(f,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, donc $g(x)=f(x)$.

II.A.4 Si $x\in]-r,0[$, $|R_n(f,x)|\leqslant\dfrac{|x|^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-u)^n|f^{(n+1)}(xu)|\,du\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(|x|u)\,du=R_n(f,|x|)$, donc $R_n(f,x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc f est somme de sa série de Taylor sur $]-r,r[$.

II.B On pose $h(x)=f(x+a)$ pour $x\in[0,b-a[$. h est AM donc somme de sa série de Taylor sur $[0,b-a[$, ce qui donne

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ sur } [a,b[.$$

II.C • Chacun des termes de la somme précédente est positif, donc si $f(x_0)=0$, tous les termes de la somme calculés en x_0 sont nuls, d'où $\forall n,\ f^{(n)}(a)=0$, donc en réutilisant B, f est nulle sur $]a,b[$.
• $f^{(p)}$ est AM, donc si elle admet un zéro, elle est nulle, donc f est polynomiale de degré $\leqslant p-1$. Inversement, toute fonction polynomiale de la forme $\sum_{k=0}^{p-1}c_k(x-a)^k$, avec $\forall k,\ c_k\geqslant 0$, convient.

Partie III

III.A $\Delta_h^n(f)$ est définie sur $]a,b-nh[$ (cet intervalle pouvant être vide).

III.B $\Delta_h=T_h-id$. Les deux endomorphismes T_h et id commutent, donc par formule du binôme, $\Delta_h^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}T_h^k$, ce qui donne le résultat car $T_h^k(f)(x)=f(x+kh)$.

III.C On remarque que si f est AM, alors $\Delta_h(f)$ est AM (sur son intervalle de définition). On en déduit par récurrence que $\Delta_h^n(f)$ est AM pour tout entier n, en particulier $\Delta_h^n(f)$ est une fonction positive. (inutile d'utiliser l'indication)

III.D

III.D.1 $f\geqslant 0$ (prendre $n=0$, bien que l'énoncé soit ambigu)
f est croissante car $\Delta_{y-x}(f)(x)=f(y)-f(x)\geqslant 0$ pour tout x,y tels que $y>x$.

III.D.2 $\Psi(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{kt}(-1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k^jt^j}{j!}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}S_jt^j$ (l'interversion des sommes ne pose pas de problème car la somme externe est finie).
Ψ est DSE sur $\mathbb{R}$ et $\Psi(t)\underset{t\to 0}{\sim}t^n$, donc les coefficients du développement de degré $j\leqslant n-1$ sont nuls et celui de degré n est égal à 1, d'où $S_j=0$ pour $j\leqslant n-1$ et $S_n=1$.

III.D.3 Pour tout entier k, $f(x_0+kh) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} k^j h^j + o(h^n)$, d'où

$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} h^j f^{(j)}(x_0) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!} \right) + o(h^n) = \sum_{j=0}^{n} h^j f^{(j)}(x_0) S_j + o(h^n) = h^n f^{(n)}(x_0) + o(h^n)$. Cette expression est positive pour tout h positif au voisinage de 0, donc en divisant par h^n et en faisant tendre h vers 0, on obtient que $f^{(n)}(x_0) \geqslant 0$, pour n et x_0 quelconques, donc f est AM.

Fin