Programme de colle – MP 1

Intégrales généralisées

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes.

L'objectif de ce chapitre est ~~double~~ :

— *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, la notion d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;*

— ~~*compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.*~~

La technicité n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs (par exemple intégrales eulériennes ou transformées intégrales).

Le programme ne contient aucune forme du théorème de Fubini, qui pourra être admis pour traiter un exercice ou un problème nécessitant son utilisation.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x\mapsto\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Linéarité de l'intégrale sur $[a,+\infty[$, positivité. Dérivation de $x\mapsto\int_x^{+\infty} f$ si f est continue.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\int_a^{+\infty}\lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ », et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
c) Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x\mapsto\int_a^x f$ est majorée. Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x\mapsto\frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$. Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: — si $0\leqslant f\leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; — si $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; — si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	
d) Intégration sur un intervalle quelconque	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ », et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».
Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x\mapsto\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a,b]$, de l'intégrabilité de $x\mapsto\frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ sur $[b,a[$.	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f\mapsto\int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge. Relation de Chasles. Espace des fonctions intégrables de I dans E. Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f=0$, alors f est identiquement nulle.	Notation $\int_I f$.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction φ : $]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t=[fg]_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.
e) Intégration des relations de comparaison	
Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est positive.

Semaine prochaine : Séries de fonctions, sommabilité.

⚠Concours blanc à la rentrée, pas de colle la première semaine.

Questions de cours :

(i) Tout énoncé de théorème de transfert par convergence uniforme avec **hypothèses très précises** (caractère bornée, continuité locale ou globale, intégrale sur un segment, primitive, classe $\mathscr{C}^1$, classe $\mathscr{C}^k$).

(ii) Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, de limite non nulle, voire non bornée.

(iii) Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(iv) Étude de l'intégrale semi-convergente $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ (convergence et non intégrabilité).

(v) Intégrale de Bertrand sur $[2,+\infty[$.

(vi) Intégration des relations de comparaison : démonstration dans le cas de convergence.

(vii) **CCINP 25** :

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

(b) (5/2) : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pose $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^ne^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

(viii) **CCINP 19** :

(a) Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \, dt$.

(b) Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$.

(5/2) : et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t \, dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n n!}$.

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

(ix) **CCINP 26** : Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} \mathrm{d}t$.

(a) Justifier que I_n est bien définie.

(b) i. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii. (5/2) : Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c) (5/2) : La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

(x) **CCINP 28** : *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

(a) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

(b) Soit a un réel strictement positif.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

(xi) **CCINP 29** : On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

(a) Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

(b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

(c) (5/2) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.