Programme de colle – MP 1

1. Arcs paramétrés

Contenus	Capacités & commentaires
g) Arcs paramétrés	
Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans E. Paramètre régulier. Exemples simples d'arcs paramétrés plans.	Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier. Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier. L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme. La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme. ⇆ I : réalisation de tracés à l'aide de l'outil informatique.

2. Suites de fonctions

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *définir les différents modes de convergence des suites ~~et séries~~ de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *énoncer deux théorèmes d'approximation uniforme choisis pour leur intérêt intrinsèque, les applications qu'ils offrent et l'interprétation qu'ils permettent en termes de densité.*

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple sur A. Convergence uniforme sur A. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a. Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A. Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A. Démonstration non exigible. Adaptation, si $A\subset\mathbb{R}$, aux cas où $a=+\infty$ et $a=-\infty$.
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in I$ soit $U_n(x)=\int_a^x u_n,\quad U(x)=\int_a^x u.$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment S, alors : $\int_S u_n \to \int_S u.$
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u'=v$.	Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur tout segment de I.
e) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.

Questions de cours :

(i) Transfert du caractère borné et de la continuité par uniforme convergence.

(ii) Transfert de primitive et de dérivée (cas $\mathscr{C}^1$) par convergence uniforme.

(iii) Approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier.

(iv) **CCINP 9** :

(a) Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

(b) On pose $f_n(x)=\dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.

i. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

ii. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

iii. Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

iv. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

(v) **CCINP 10** : On pose $f_n(x)=\left(x^2+1\right)\dfrac{n\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

(a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) Calculer la limite lorsque $n\to+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

(vi) **CCINP 11** :

(a) Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.

On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

i. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

ii. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

(vii) **CCINP 12** :

(a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.

Démontrer que f est continue en x_0.

(b) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

(viii) **CCINP 13** :

(a) Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.

Démontrer que la fonction g est bornée.

(b) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?