CHAPITRE XI

Séries de fonctions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

I CONVERGENCES SIMPLE, UNIFORME, NORMALE

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I si pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge. Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

2 Convergence uniforme

Définition : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur I, c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : I \to \mathbb{K}$ tel que

- à partir d'un certain rang, $S_n - f$ bornée sur I,
- $\|S_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Propriété

- *Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers f, alors elle converge simplement vers f.*
- *Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que $\alpha_n \to 0$ et $\forall x \in I$, $|S_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers f.*

Propriété

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur I, R_n le reste d'ordre n.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Propriété

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur I, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang les f_n sont bornées et $\|f_n\|_\infty \to 0$.

Méthode : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(a_n) \not\to 0$.

Méthode : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f.

Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

3 Convergence normale

Définition : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur I lorsque les f_n sont toutes bornées et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Propriété : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur I,

- *elle converge uniformément,*
- *pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.*

Méthode : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur I, on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.

Propriété : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe une suite $(a_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(a_n)$ ne converge pas absolument, alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I.

II Théorèmes de transfert

1 Continuité

Théorème : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de I (sur tout segment suffit).*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur I.*

2 Double limite

Théorème : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $\sum f_n$ *converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors

C1 $\sum b_n$ *converge.*

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.

Méthode : Pour montrer une absence de convergence uniforme...

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a.

3 Intégration sur un segment

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a,b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

4 Primitive

Théorème : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I*

et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.

5 Classe $\mathscr{C}^p$

Théorème : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

C3 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

III Généralisation à des séries vectorielles

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie non vide de F.

Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles.

1 Convergences simple, uniforme, normale

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E^A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Définition

On dit que la série de fonction $\sum f_n$

- **converge simplement** sur A si, pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.
- **converge uniformément au voisinage de** $a \in \overline{A}$ **s'il existe** $r > 0$ **tel que** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** $A \cap B(a, r)$**.**

On note, pour $f \in E^A$ bornée, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_E$.

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

2 Généralisation des théorèmes de transfert

Théorème : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à E^A, $a \in A$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en a (respectivement sur A).*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de a (respectivement de chaque point de A).*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue en a (respectivement sur A).*

Théorème : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à E^A, $(b_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$ (éventuellement infini si $F = \mathbb{R}$). On suppose que

H1 *$\sum f_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors

C1 *$\sum b_n$ converge.*

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.

Désormais, les fonctions sont considérées de I intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide vers l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|_E)$.

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $E^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $a \in I$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

- **C1** *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*
- **C2** *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- **H2** *Les séries de fonctions $\sum f_n, \sum f_n', \dots, \sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I.*
- **H3** *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

- **C1** *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- **C2** *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ et la convergence est uniforme sur tout segment de I.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*
- **H3** *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

- **C1** *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*
- **C2** *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*