CHAPITRE XI

Séries de fonctions

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.	
Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes b), c) et d) ci-dessus [1].	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

TABLE DES MATIÈRES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

I CONVERGENCES SIMPLE, UNIFORME, NORMALE

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^I$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1. Continuité, limite, intégration, dérivation des suites de fonctions.

1 Convergence simple

Définition : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I si pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge. Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarques

R 1 – Ainsi, la **serie** de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement, et dans ce cas, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

R 2 – Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et la réciproque est fausse.

Exemple

Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$ puis $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

2 Convergence uniforme

Définition : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur I, c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : I \to \mathbb{K}$ tel que

- à partir d'un certain rang, $S_n - f$ bornée sur I,
- $\|S_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque

On définit aussi de même la convergence uniforme au voisinage d'un point (finie ou non) de la série de fonction comme convergence uniforme locale de (S_n).

Propriété

- *Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers f, alors elle converge simplement vers f.*
- *Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que $\alpha_n \to 0$ et $\forall x \in I,\ |S_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers f.*

Démonstration

Héritée des suites de fonctions. □

Propriété

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur I, R_n le reste d'ordre n.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Démonstration

Conséquence immédiate de la définition. □

Exercice : CCINP 8

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Corrigé :

On pose : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$. On a alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|f_n(x)\right| = +\infty$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

   Si $x \geqslant 0$, alors $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

   Donc d'après 1.(a), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   Remarque : pour $x > 0$, on a aussi convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

   En effet, pour tout réel $x > 0$, $n^2 \left|f_n(x)\right| = ne^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\left|f_n(x)\right| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$, on peut poser $\forall\, x \in [0,+\infty[,\ R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

   Alors, comme, $\forall\, x \in [0,+\infty[,\ (u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit, d'après 1.(b), que :

   $\forall\, x \in [0,+\infty[,\ |R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$.

   Et donc $\forall\, x \in [0,+\infty[,\ |R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

   Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

   C'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Propriété

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur I, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang les f_n sont bornées et $\left\|f_n\right\|_\infty \to 0$.

Démonstration

$(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 donc $(f_n) = (R_n - R_{n-1})_n$ aussi car $\left|f_n(x)\right| \leqslant \|R_n - R_{n-1}\|_\infty \leqslant \|R_n\|_\infty - \|R_{n-1}\|_\infty \to 0$ avec une majoration indépendante de x. □

Méthode : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(a_n) \not\to 0$.

Exercice : CCINP 17

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
2. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

Corrigé :

1. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Soit $x \in [0;+\infty[$.
   Si $x = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = 0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument donc, par critère de domination, $\sum f_n(x)$ converge absolument.
   On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc f_n est bornée sur $[0;+\infty[$.

   Comme f_0 est bornée ($f_0 = 0$), on en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée.
   De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
   En effet, si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{e}^{-1}$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left|f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant \sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)|$; donc $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)| \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
   Ainsi, $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
   On en déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0;+\infty[$.
   Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;+\infty[$.

Méthode : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f. Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = \left|S_n - f\right|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

Exemple

Fonction ζ sur $]1,+\infty[$: $R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$ par comparaison à une intégrale. Convergence uniforme sur tout $[a,+\infty[$ où $a > 1$.

3 Convergence normale

Définition : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur I lorsque les f_n sont toutes bornées et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Propriété : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur I,

- *elle converge uniformément,*
- *pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.*

Démonstration

- $|R_n(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \to 0$.
- Pour tout $x \in I$, $\left|f_n(x)\right| \leqslant \|f_n\|_\infty$. □

Remarques

R 1 – On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \text{Convergence uniforme} \arrow[dr] & \\ \text{Convergence normale} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Convergence simple} \\ & \text{Convergence absolue} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Les réciproques sont fausses.

R 2 – En cas de convergence normale locale / sur tout segment, on en tire une convergence uniforme du même type.

Exemples

E 1 – Pour la fonction ζ, il n'y a pas convergence normale sur $]1,+\infty[$, mais sur tout $[a,+\infty[$.
On retrouve la convergence uniforme.

E 2 – $\sum n^{\alpha}xe^{-n^2x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha<1$.
Sinon, convergence normale sur $[a,+\infty[$.

Méthode : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur I, on peut rechercher $(\alpha_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in I$, $\left|f_n(x)\right|\leqslant\alpha_n$,
- $\sum\alpha_n$ converge.

Exemple

$f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

Propriété : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe une suite $(a_n)_n\in I^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(a_n)$ ne converge pas absolument, alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I.

Exemple

$f_n(x)=xe^{-n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

II THÉORÈMES DE TRANSFERT

1 Continuité

Théorème : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de I (sur tout segment suffit).*

Alors

C1 $f=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$ *est continue sur I.*

Exemple

ζ est continue sur $]1,+\infty[$.

2 Double limite

Théorème : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $\sum f_n$ *converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors

C1 $\sum b_n$ *converge.*

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien : $\displaystyle\lim_{x\to a}\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$.

Remarque

⚠ Lorsque a est une borne ouvert de I, une convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas !

Exemples

E 1 – ζ en $+\infty$ tend vers 1.

E 2 – $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$: convergence simple, continuité sur $\mathbb{R}_+^*$. Pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$. Limite en $+\infty$.

Exercice : CCINP 53

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Corrigé

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.

   Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4x^3}$.

   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

   Conclusion : $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.
   • Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

   $\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{n^4a^4}$ (majoration indépendante de x).

De plus, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

• Prouvons que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

$\forall x \in [a,+\infty[,\ |f_n(x)| \leqslant \frac{x}{n^4x^4} = \frac{1}{n^4x^3} \leqslant \frac{1}{n^4a^3}$ (majoration indépendante de x).

De plus, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

(c) On remarque que f_n est continue sur le compact $[0,1]$, donc f_n est bornée sur $[0,1]$.
De plus, d'après 1.(b), $\forall x \in [1,+\infty[,\ |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^4}$, donc f_n est bornée sur $[1,+\infty[$.
On en déduit que f_n est bornée sur $[0,+\infty[$ et que $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \geqslant f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$.

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

Autre méthode :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ f_n'(x) = \frac{1-3n^4x^4}{\left(1+n^4x^4\right)^2}$.

On en déduit que f_n est croissante sur $\left]0, \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}, +\infty\right[$.
f_n étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_n est bornée.

Donc $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe et $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}) = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4n}$.

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$. (1)
$\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$. (2)
Donc, d'après (1) et (2), f est continue sur $]0,+\infty[$.
Comme f est impaire, on en déduit que f est également continue sur $]-\infty,0[$.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4x^3}$.
D'après 1.(b), $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.

Donc, d'après le cours, f admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exemple : Contre-exemple en 0 sur tout segment

$f_n(x) = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$.

1. Convergence simple, calcul de f.
2. Convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Problème de double-limite en 0^+.

Méthode : Pour montrer une absence de convergence uniforme...

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a.

3 Intégration sur un segment

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*

C2 $\displaystyle\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

C3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice : CCINP 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Corrigé

La série $\sum x^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On en déduit alors que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{2^n}$.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ puis déterminer $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Réponse : $2\ln 2 - \frac{5}{4}$.

4 Primitive

Théorème : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

5 Classe $\mathscr{C}^p$

Théorème : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

C3 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

Exercice : CCINP 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Corrigé

1. Soit $x \in [0,1]$.
Si $x=0$, $u_n(0)=0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.
Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\dfrac{x^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$.
Or $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.
La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-x}{n(x+n)}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
On en déduit que $\|u_n'\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Or $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.
Donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.
On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$. Elle est donc dérivable sur $[0,1]$.
Et on a : $\forall x \in [0;1]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.
2. En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right)$.
Or $\sum_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow[N \to +\infty]{} -1$.
Donc $S'(1) = -1$.

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.
Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer f' et étudier les variations de f.

III Généralisation à des séries vectorielles

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie non vide de F.
Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles.

1 Convergences simple, uniforme, normale

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E^A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Définition

On dit que la série de fonction $\sum f_n$

- **converge simplement** sur A si, pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.
- **converge uniformément au voisinage de $a \in \overline{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A \cap B(a,r)$.**

On note, pour $f \in E^A$ bornée, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_E$.

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

2 Généralisation des théorèmes de transfert

Théorème : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à E^A, $a \in A$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en a (respectivement sur A).*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de a (respectivement de chaque point de A).*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue en a (respectivement sur A).*

Théorème : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à E^A, $(b_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$ (éventuellement infini si $F = \mathbb{R}$). On suppose que

H1 $\sum f_n$ *converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors

C1 $\sum b_n$ *converge.*

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim_{x \to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$.

Désormais, les fonctions sont considérées de I intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide vers l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|_E)$.

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $E^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Les séries de fonctions $\sum f_n, \sum f_n', \dots, \sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ et la convergence est uniforme sur tout segment de I.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*