Intégrales généralisées

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On souhaite généraliser la notion d'intégrale à des intervalles qui ne sont pas des segments.

I INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE DE LA FORME $[a,+\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Intégrale convergente

Définition : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$.

Dans ce cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Propriété : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale dite de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Propriété

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent.

Alors $\int_a^{+\infty} (f+\lambda g)$ converge et $\int_a^{+\infty} (f+\lambda g) = \int_a^{+\infty} f + \lambda \int_a^{+\infty} g$.

Propriété

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $b \in [a,+\infty[$ alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_b^{+\infty} f$ ont même nature.

Si elles convergent, $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$.

2 Cas des fonctions réelles positives

Propriété

Soit $f \in \mathscr{C}_n([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.

Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante, et $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si F est majorée.

Théorème : Intégrabilité des fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, tel que $\int_a^{+\infty} g$ converge et que l'une des trois hypothèse suivante est vérifiée

$$0 \leqslant f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(g) \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(g),$$

alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Théorème : Non intégrabilité des fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, tel que $\int_a^{+\infty} g$ diverge et que l'une des trois hypothèse suivante est vérifiée

$$0 \leqslant g \leqslant f \quad \text{ou} \quad g \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(f) \quad \text{ou} \quad g \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(f),$$

alors $\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Théorème : Intégrabilité des fonctions positives par équivalent

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ ont même nature.

3 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Définition : Fonction intégrable

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a,+\infty[$ lorsque $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente. On dit aussi que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente.**

Théorème : l'absolue convergence entraîne la convergence

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
La réciproque est fausse.

Théorème : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.

- *Si g est intégrable sur $[a,+\infty[$ et que l'une des trois hypothèse suivante est vérifiée*

$$f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(g) \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(g),$$

  alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
- *Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si g l'est.*

4 Comparaison série-intégrale

Théorème

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

H1 *f est continue par morceaux,*

H2 *f est décroissante,*

H3 *f est positive*

alors

C1 *$\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[n_0,+\infty[$.*

II Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

1 Cas d'un intervalle semi-ouvert

On généralise les résultats précédents aux intervalles de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ (respectivement $]a,b]$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en b (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en a).

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f$ cette limite.

On dit que f est **intégrable** sur $]a,b]$ ou $[a,b[$ lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

Propriété : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *(respectivement* $]-\infty,-1]$*) si et seulement si* $\alpha > 1$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur* $]0,1]$ *(respectivement* $[-1,0[$*) si et seulement si* $\alpha < 1$.

Théorème : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$.

- *Si g est intégrable sur $[a,b[$ et que l'une des trois hypothèse suivante est vérifiée*

$$\text{Au voisinage de } b,\ f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g),$$

  alors f est intégrable sur $[a,b[$.
- *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g l'est.*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$ en comparant au voisinage de a.

Propriété

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$, $c \in [a,b[$.

Alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$ converge.

On a un résultat analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$.

2 Cas d'un intervalle ouvert

Définition

Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a,b[$ (qui est en fait quelconque d'après la propriété précédente) tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes.

Dans ce cas, on note $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On dit que f est **intégrable** sur $]a,b[$ lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

3 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème

Soit f continue par morceaux sur I. Si f est intégrable sur I, alors $\int_I f$ converge.

Théorème

- *L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
- *L'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire de cet espace.*

Propriété : Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I,

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Propriété

Si f est à valeurs complexes, $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \mathfrak{Re}(f)$ et $\int_I \mathfrak{Im}(f)$ convergent.

Dans ce cas, $\int_I f = \int_I \mathfrak{Re}(f) + \mathrm{i}\int_I \mathfrak{Im}(f)$.

4 Étude et rédaction de l'existence d'une intégrale

Méthode : Étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle I ou étudier la convergence de $\int_a^b f$

(ce n'est pas la même chose !)

Position du problème

- Si I est un segment, il n'y a pas de problème.
- Si I est un intervalle bornée sur lequel f est bornée, alors f est intégrable par comparaison à une fonction constante qui est intégrable.
- Si I est un intervalle ouvert $]a,b[$, on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$. Le réel c est choisi quelconque dans $]a,b[$ et on est ramené à une étude sur $]a,c]$ et $[c,b[$ (semi-ouverts).

Cas des fonctions positives

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est équivalente à l'intégrabilité. Bien insister dans la rédaction :

« La fonction $f : x \mapsto \cdots$ est continue (par morceaux), **positive** sur l'intervalle ... »

en précisant bien l'intervalle.

S'il est ouvert, on coupe en deux et on étudie **séparément** les deux intégrabilités.

Cas des fonctions non positives

... ni négatives.

Dans ce cas, on s'intéresse soit à l'intégrabilité (absolue convergence), soit à la (semi)-convergence de l'intégrale (mais cette dernière n'est pas un objectif du programme).

III Propriétés des intégrales généralisées

1 Relation de Chasles

Propriété : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge.

(i) Si J sous-intervalle de I, alors $\int_J f$ converge.

(ii) Si $a,b,c \in \overline{I}$ éventuellement infinis, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, toutes ces intégrales étant bien convergentes.

2 Propriétés liées à l'ordre

Propriétés : liées à l'ordre

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{R})$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité : $f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_I f \geqslant 0.$

Croissance : $f \leqslant g \Longrightarrow \int_I f \leqslant \int_I g.$

Positivité améliorée : *Si f est positive, **continue** sur I et si $\int_I f = 0$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$.*

*De façon équivalente, si f est positive, **continue**, non identiquement nulle sur I alors $\int_I f > 0$.*

3 Intégrale généralisée dépendant d'une borne

Propriété : Dérivation

Si f est continue sur $[a,b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $g : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$ et $g' = -f$.

Si f est continue sur $]a,b]$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $h : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et $h' = f$.

IV CHANGEMENTS DE VARIABLE, INTÉGRATIONS PAR PARTIES

1 Changement de variable

Théorème : Changement de variable

*Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a,b[$ une **bijection** de classe $\mathscr{C}^1$. Alors φ est strictement monotone.*

On suppose que $\varphi(u) \xrightarrow[u\to\alpha]{} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow[u\to\beta]{} b$ (quitte à échanger les bornes des intervalles).

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence, elles sont égales.

Propriété : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b,a[$ (respectivement $]a,b]$) si et seulement si $\alpha > 1$.

2 Intégration par parties

On ne fait pas d'intégration par partie sur des intégrales généralisées : on pourrait faire apparaître des termes qui n'existent pas.

Donc on repasse à une intégrale sur un segment, on intègre par parties puis on passe à la limite.

V INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Théorème

*Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b[, \mathbb{K})$ et $g \in \mathscr{C}_m([a,b[, \mathbb{R}^+)$ une fonction à valeurs **réelles positives**.*

Cas de divergence *Si $\int_a^b g$ diverge et*

(i) *si $f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$, alors $\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\left(\int_a^x g\right)$*

(ii) *si $f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$, alors $\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x g\right)$*

(iii) *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$*

Cas de convergence *Si $\int_a^b g$ converge et*

(i) *si $f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$, alors f intégrable et $\int_x^b f = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\left(\int_x^b g\right)$*

(ii) *si $f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$, alors f intégrable et $\int_x^b f = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b g\right)$*

(iii) *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f intégrable et $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$.