Intégrales généralisées

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes.

L'objectif de ce chapitre est ~~double~~ :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, la notion d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;*
- *~~compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.~~*

La technicité n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs (par exemple intégrales eulériennes ou transformées intégrales).

Le programme ne contient aucune forme du théorème de Fubini, qui pourra être admis pour traiter un exercice ou un problème nécessitant son utilisation.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite.	Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité de l'intégrale sur $[a,+\infty[$, positivité. Dérivation de $x\mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ si f est continue.	
b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ », et « l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
c) Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée.	
Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x\mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.	
Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: — si $0\leqslant f\leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	
d) Intégration sur un intervalle quelconque	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ », et « l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument ».
Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x\mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a,b]$, de l'intégrabilité de $x\mapsto \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ sur $[b,a[$.	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$.	Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f\mapsto \displaystyle\int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge. Relation de Chasles.	Notation $\displaystyle\int_I f$.
Espace des fonctions intégrables de I dans E. Inégalité triangulaire.	
Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_I f=0$, alors f est identiquement nulle.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.
e) Intégration des relations de comparaison	
Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est positive.

TABLE DES MATIÈRES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On souhaite généraliser la notion d'intégrale à des intervalles qui ne sont pas des segments.

I INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE DE LA FORME $[a,+\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Intégrale convergente

Définition : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$.

Dans ce cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Remarque

Sinon, $\int_a^{+\infty} f$ diverge et l'objet $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'a aucun sens.

Exemples

E 1 – $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

E 2 – $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ diverge.

Propriété : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale dite de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

On calcule $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$ □

Exercices

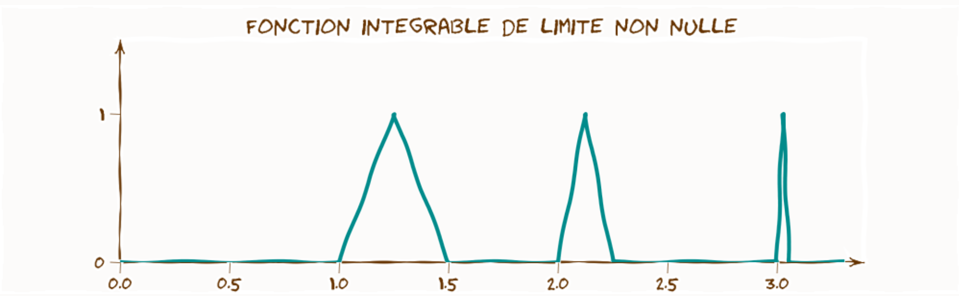
Ex 1 – Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que l'intégrale dite exponentielle $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Ex 2 – Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel β pour que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ converge (Cas particulier d'intégrales de Bertrand).

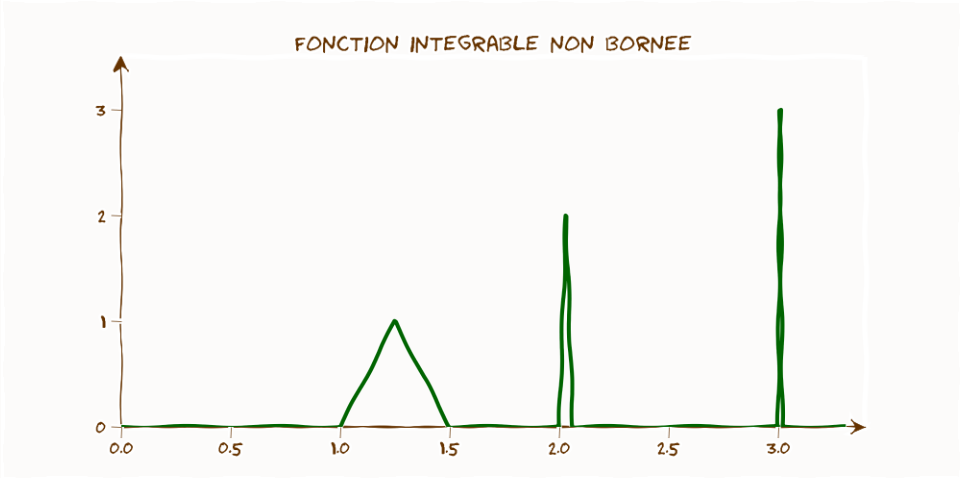
Remarque

⚠ $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow u_n \to 0$. Ce n'est plus le cas pour la convergence de $\int_a^{+\infty} f$.

Par exemple, si on considère la fonction f nulle partout sauf entre n et $n + \frac{2}{n^2}$ où elle dessine un triangle isocèle de hauteur 1, d'aire $\frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$. Alors $f \geqslant 0$, $\int_a^x f \leqslant \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6} - 1$ et $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante donc $\int_a^{+\infty} f$ converge, et pourtant $f(x) \not\to 0$ lorsque $x \to +\infty$.



On peut même construire une fonction f non bornée dont l'intégrale converge : il suffit que les triangles soient de hauteur n et de base $\frac{1}{2n^3}$.



Par contre, si f a une limite non nulle, l'intégrale diverge.

Propriété

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, *telles que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *convergent.*

Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty}(f+\lambda g)$ *converge et* $\displaystyle\int_a^{+\infty}(f+\lambda g) = \int_a^{+\infty} f + \lambda\int_a^{+\infty} g$.

Propriété

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $b \in [a,+\infty[$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *et* $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ *ont même nature.*

Si elles convergent, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$.

Démonstration

$$\int_a^x f = \int_a^b f + \int_b^x f. \qquad \square$$

2 Cas des fonctions réelles positives

Propriété

Soit $f \in \mathscr{C}_n([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.
Alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est croissante, et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge si et seulement si* F *est majorée.*

Théorème : Intégrabilité des fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, *tel que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *converge et que l'une des trois hypothèse suivante est vérifiée*

$$0 \leqslant f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(g) \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(g),$$

alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge.*

Remarque

Similaire aux séries.
Il est indispensable que les fonctions soient à valeurs positives !

Démonstration

Dans tous les cas, $f \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(g)$. On a $A, M \in \mathbb{R}$ tels que $A, M \geqslant a$ et si $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant Mg(x)$.
Alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + M\int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t$ qui est majoré car convergeant. □

Théorème : Non intégrabilité des fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, tel que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge et que l'une des trois hypothèse suivante est vérifiée

$$0 \leqslant g \leqslant f \quad \text{ou} \quad g \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(f) \quad \text{ou} \quad g \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(f),$$

alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Démonstration

Contraposée. □

Théorème : Intégrabilité des fonctions positives par équivalent

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ ont même nature.

Démonstration

Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $f \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(g)$ et $g \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(f)$. □

Exercice : CCINP 25

Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Définition : Fonction intégrable

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a,+\infty[$ lorsque $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente. On dit aussi que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente.**

Exemples

E 1 – **Intégrales de Riemann** : $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

E 2 – **Intégrales exponentielles** : $x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

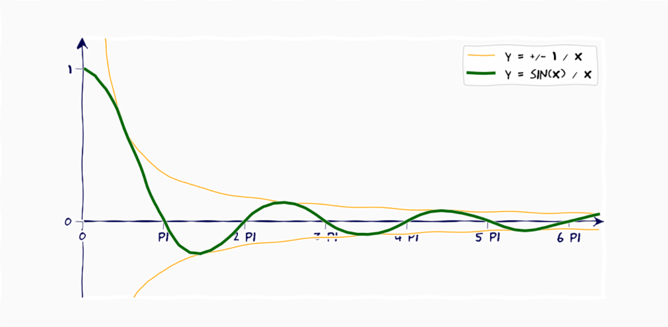
Théorème : l'absolue convergence entraîne la convergence

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.
La réciproque est fausse.

Démonstration

Similaire à la preuve pour les séries.

- On suppose f à valeurs réelles. On introduit les parties positives et négatives de f : $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2} : x \mapsto \max(f(x),0) \geqslant 0$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2} : x \mapsto \max(-f(x),0) \geqslant 0$.
  Comme f^+ et f^- sont positives et majorées par $|f|$ qui est telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge (donc intégrable), c'est aussi le cas de f^+ et f^- et donc de $f = f^+ - f^-$.
- Si f est à valeurs complexes, il suffit de remarquer que $|\mathfrak{Re}\, f| \leqslant |f|$ et $|\mathfrak{Im}\, f| \leqslant |f|$ et d'utiliser le cas réel.
- Pour la réciproque fausse, on s'intéresse à l'exemple très classique $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
  Par intégration par parties, si $x \geqslant \pi$, $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} + \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, avec $0 \leqslant \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\displaystyle -\frac{1}{\pi} + \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
  Or si $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = 2$ par le changement de variable $u = t-(k-1)\pi$.
  Alors $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: l'intégrale n'est pas absolument convergente.



$\square$

Remarques

R 1 – Une intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ convergente mais non absolument convergente et dite semi-convergente.

R 2 – Comme on l'a vu avec cet exemple, dans la pratique, pour procéder à une intégration par partie, on se ramène à une borne finie x puis on passe à la limite. Cela éviter de risquer d'écrire des termes qui n'existent pas. Voir plus loin.

Théorème : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.

- *Si g est intégrable sur $[a,+\infty[$ et que l'une des trois hypothèse suivante est vérifiée*

$$f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(g),$$

  alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
- *Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si g l'est.*

Remarque

Si les fonctions ne sont pas à valeurs positives, on met des valeurs absolues/modules.
Ainsi, si $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tel que g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et ($f \leqslant g$ ou $f = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(g)$ ou $f = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(g)$), alors ($|f| \leqslant |g|$ ou $|f| = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(|g|)$ ou $|f| = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(|g|)$) donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge.
Et si $f \sim g$, alors $|f| \sim |g|$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |g|$ converge.

Exemples

E 1 – Montrer que $x \mapsto \dfrac{x^2+3x+1}{x^4+x^2+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

E 2 – Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice : Classique : intégrales de Bertrand

Montrer que $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \text{ est intégrable sur } [2, +\infty[\text{ si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$

(Même résultat que sur les séries.)

On a $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ fonction réelle positive sur $[2, +\infty[$.

- Si $\alpha < 1$, $\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x} \geqslant 0$ non intégrable sur $[2, +\infty[$, donc f non plus par comparaison de fonctions réelles positives.
- Si $\alpha > 1$, $\gamma \in]1, \alpha[$, $\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma} \geqslant 0$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ donc f l'est par comparaison de fonctions réelles positives.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$, $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta t} = \left[\frac{-1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} t}\right]_2^x = \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} 2} - \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} x}$ qui converge si et seulement si $\beta > 1$.
- Si $\alpha = \beta = 1$, $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_2^x = \ln\ln x - \ln\ln 2 \to +\infty$.

4 Comparaison série-intégrale

Théorème

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *tel que*

H1 f *est continue par morceaux,*

H2 f *est décroissante,*

H3 f *est positive*

alors

C1 $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ *converge si et seulement si* f *est intégrable sur* $[n_0, +\infty[$.

Démonstration

Déjà vu dans le chapitre sur les séries. □

II Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

1 Cas d'un intervalle semi-ouvert

On généralise les résultats précédents aux intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie en b (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ a une limite finie en a).

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $\int_a^b f$ cette limite.

On dit que f est **intégrable** sur $]a, b]$ ou $[a, b[$ lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

Remarque

Si la borne ouverte est finie et que f possède une limite finie au point, il suffit de faire un prolongement par continuité : on est ramené à une intégrale sur un segment.

Par exemple, $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge sans problème.

Exemple

$\tan$ n'est pas intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Propriété : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *(respectivement* $]-\infty, -1]$*) si et seulement si* $\alpha > 1$.
- $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur* $]0, 1]$ *(respectivement* $[-1, 0[$*) si et seulement si* $\alpha < 1$.

Démonstration

Si $0 < a < b$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln b - \ln a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

Sinon, il suffit de faire un changement de variable $x \mapsto -x$ pour s'y ramener.

On passe aussi de $[1, +\infty[$ à $]0, 1]$ par changement de variable $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. □

Exemple

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge mais $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ divergent.

Théorème : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$.

- *Si g est intégrable sur $[a, b[$ et que l'une des trois hypothèse suivante est vérifiée*

$$\text{Au voisinage de } b,\ f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g),$$

  alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.*

On a un énoncé analogue sur $]a, b]$ en comparant au voisinage de a.

Remarque

Et de nouveau, si les fonctions ne sont pas réelles positives (ni de signe constant), on passe aux valeurs absolues / modules.

Propriété

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$, $c \in [a, b[$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_c^b f$ converge.

On a un résultat analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$.

Démonstration

$\displaystyle\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f.$ □

2 Cas d'un intervalle ouvert

Définition

Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a,b[$ (qui est en fait quelconque d'après la propriété précédente) tel que $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont convergentes.

Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

On dit que f est **intégrable** sur $]a,b[$ lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

Exemple

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ diverge.

Remarque

⚠ Il faut démontrer la convergence des deux intégrales séparément !

Exemple

$\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan t\,\mathrm{d}t$ diverge alors que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} \tan t\,\mathrm{d}t = 0$.

3 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème

Soit f continue par morceaux sur I. Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I f$ converge.

Théorème

- *L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
- *L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_I f$ est une forme linéaire de cet espace.*

Remarques

R 1 – Donc si f, g intégrables sur I, alors $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

R 2 – ⚠ Comme pour les séries, il faut y réfléchir à deux fois avant de séparer une intégrale généralisée en deux : on a vite fait de manipuler des termes qui n'existent pas...

R 3 – C'est encore le cas en prenant plus généralement les fonctions dont l'intégrale converge.

Démonstration

On traite le cas où $I=[a,b[$. Le cas où $I=]a,b]$ est similaire et celui où $I=]a,b[$ s'en déduit.
Sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$, on passe à la limite dans l'inégalité triangulaire intégrale en séparant en deux. □

Propriété : Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I,

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Propriété

Si f est à valeurs complexes, $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \mathfrak{Re}(f)$ et $\int_I \mathfrak{Im}(f)$ convergent.
Dans ce cas, $\int_I f = \int_I \mathfrak{Re}(f) + \mathrm{i}\int_I \mathfrak{Im}(f)$.

Démonstration

Propriété générale sur les limites de fonctions. □

4 Étude et rédaction de l'existence d'une intégrale

Méthode : Étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle I ou étudier la convergence de $\int_a^b f$

(ce n'est pas la même chose !)

Position du problème

- Si I est un segment, il n'y a pas de problème.
- Si I est un intervalle bornée sur lequel f est bornée, alors f est intégrable par comparaison à une fonction constante qui est intégrable.
- Si I est un intervalle ouvert $]a,b[$, on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$. Le réel c est choisi quelconque dans $]a,b[$ et on est ramené à une étude sur $]a,c]$ et $[c,b[$ (semi-ouverts).

Cas des fonctions positives

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est équivalente à l'intégrabilité. Bien insister dans la rédaction :

« La fonction $f : x \mapsto \cdots$ est continue (par morceaux), **positive** sur l'intervalle ... »

en précisant bien l'intervalle.
S'il est ouvert, on coupe en deux et on étudie **séparément** les deux intégrabilités.

Cas des fonctions non positives

... ni négatives.
Dans ce cas, on s'intéresse soit à l'intégrabilité (absolue convergence), soit à la (semi)-convergence de l'intégrale (mais cette dernière n'est pas un objectif du programme).

Exemples

E 1 – $x \mapsto \cos^3(1/x)$ est intégrable sur $]0,1]$

E 2 – Étudier l'existence de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}$.

E 3 – Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

⚠ Mauvaise rédaction : $\left|\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$...
Comme pour les séries, c'est à la fonction qu'on s'intéresse et non aux « intégrales partielles ».

III PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1 Relation de Chasles

Remarque

La notion d'intégrale généralisée se... généralise au cas où les bornes ne sont pas dans le bon sens.

Propriété : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_I f$ converge.

(i) Si J sous-intervalle de I, alors $\displaystyle\int_J f$ converge.

(ii) Si $a,b,c \in \overline{I}$ éventuellement infinis, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, toutes ces intégrales étant bien convergentes.

Démonstration

Si, par exemple, $a,c \in I$ et $b \notin I$ borne supérieure de I Il suffit de faire $x \to +\infty$ dans la relation de Chasles $\displaystyle\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$.
Les autres cas se traitent de manière similaire. □

2 Propriétés liées à l'ordre

Propriétés : liées à l'ordre

Soient $f,g \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent.

Positivité : $f \geqslant 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_I f \geqslant 0.$

Croissance : $f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g.$

Positivité améliorée : *Si f est positive, **continue** sur I et si $\displaystyle\int_I f = 0$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$.*

*De façon équivalente, si f est positive, **continue**, non identiquement nulle sur I alors $\displaystyle\int_I f > 0$.*

Démonstration

On traite le cas où $I = [a,b[$.
Simples passages à la limite pour les deux premiers.
Pour la positivité améliorée, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est croissante et positive, donc si sa limite est nulle elle est constamment nulle, il suffit alors d'appliquer la positivité améliorée sur le segment $[a,x]$. □

3 Intégrale généralisée dépendant d'une borne

Propriété : Dérivation

Si f est continue sur $[a,b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $g : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$ et $g' = -f$.

Si f est continue sur $]a,b]$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $h : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et $h' = f$.

Remarque

Se retrouve avec une primitive.

Démonstration

F primitive de f qui s'annule en a.
$g : x \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - F(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$ et $g'(x) = -f(x) + 0$. $\square$

IV CHANGEMENTS DE VARIABLE, INTÉGRATIONS PAR PARTIES

1 Changement de variable

Théorème : Changement de variable

*Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une **bijection** de classe $\mathscr{C}^1$. Alors φ est strictement monotone.*
On suppose que $\varphi(u) \xrightarrow[u\to\alpha]{} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow[u\to\beta]{} b$ (quitte à échanger les bornes des intervalles).

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence, elles sont égales.

Remarque

Même nature est à prendre au sens convergentes ou divergentes ou absolument convergentes ou semi-convergentes.
C'est donc très utile pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

Démonstration

On traite le cas où φ est strictement croissante : les bornes restent « dans le bon sens ».
si $x, y \in]\alpha,\beta[$, on peut appliquer la formule de changement de variable sur le segment $[x,y]$:

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Ensuite, si $x \to \alpha$, alors $\varphi(x) \to a$ et si $y \to \beta$, alors $\varphi(y) \to b$. Donc, il y a convergence (ou convergence absolue) dans le membre de droite lorsque $x \to \alpha$ puis $y \to \beta$ si et seulement si $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge (ou converge absolument).

Comme φ est bijective et bicontinue (via le théorème de la bijection), $\int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x'}^{y'} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $x = \varphi^{-1}(x')$ et $y = \varphi^{-1}(y')$.

Alors $x \to \alpha \iff x' \to a$ et $y \to \beta \iff y' \to b$. Donc le membre de gauche converge si et seulement si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. $\square$

Remarques

R 1 – Le programme autorise l'utilisation sans justification dans les cas suivants : φ fonction affine, puissance, exponentielle, logarithme.

R 2 – Mais il vaut mieux insister. Faire un changement de variable avec une rédaction de la forme :« Changement de variable $t = \varphi(u)$ où $\varphi : \cdots \to \cdots$ **bijective et de classe** $\mathscr{C}^1$ ». On peut alors exprimer $u = \varphi^{-1}(t)$.

R 3 – Sur un segment, la bijectivité n'était pas nécessaire, ici elle l'est.

Exemples

E 1 – Trouver un lien entre l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

E 2 – Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ à l'aide des intégrales de Wallis $W_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^k t\,dt$.

E 3 – Déduire de l'étude des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, celle de ces mêmes intégrales sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

Propriété : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ (respectivement $]a, b]$) si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Changement de variable affine $t = x - a$. □

2 Intégration par parties

On ne fait pas d'intégration par partie sur des intégrales généralisées : on pourrait faire apparaître des termes qui n'existent pas.

Donc on repasse à une intégrale sur un segment, on intègre par parties puis on passe à la limite.

Remarque

Le programme donne tout de même un résultat, qu'on n'utilisera pas : si f et g ont des limites finies en a et en b (« si le crochet existe »), les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes (mais seulement l'une peut être semi-convergente contrairement au changement de variable). Et en cas de convergence, on peut écrire

$$\int_a^b f'g = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b fg'$$

(ou le crochet est à prendre au sens des limites.)

Il est largement préférable, dans la pratique, de repasser par une intégration par partie classique sur un segment.

Exemple

Si $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$. Trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : CCINP 19

Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t \, dt$.

V INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Théorème

*Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$ une fonction à valeurs **réelles positives**.*

Cas de divergence *Si $\int_a^b g$ diverge et*

(i) si $f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$, alors $\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\left(\int_a^x g\right)$

(ii) si $f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$, alors $\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x g\right)$

(iii) Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$

Cas de convergence *Si $\int_a^b g$ converge et*

(i) si $f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$, alors f intégrable et $\int_x^b f = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\left(\int_x^b g\right)$

(ii) si $f = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$, alors f intégrable et $\int_x^b f = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b g\right)$

(iii) Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f intégrable et $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$.

Remarque

Noter l'analogie avec les sommes partielles et les restes des séries.

Démonstration

Similaire aux séries. On traite le cas ou $I = [a,b[$.

Cas de convergence

(i) $|f| = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$ donc f est intégrable et on a $M \in \mathbb{R}^+$ et un réel $c \in [a,b[$ tel que si $x \in [c,b[$, $|f(x)| \leqslant Mg(x)$ (valable si $b = +\infty$). Si $x \in [c,b[$,

$$\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant M \int_x^b g$$

donc $\int_x^b f = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\left(\int_x^b g\right)$.

(ii) $|f| = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$ donc f est intégrable et si $\varepsilon > 0$, on a un réel $c \in [a,b[$ tel que si $x \in [c,b[$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$ (valable si $b = +\infty$). Si $x \in [c,b[$,

$$\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant \varepsilon \int_x^b g$$

donc $\int_x^b f = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b g\right)$.

(iii) Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $h = f - g = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$ est intégrable et $\int_x^b h = \int_x^b f - \int_x^b g = \underset{b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b g\right)$ par (ii).

Donc $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$

Cas de divergence

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un réel $c \in [a,b[$ tel que si $x \in [c,b[$, $|f(x)| \leqslant Mg(x)$ (valable si $b = +\infty$). Si $x \in [c,b[$,

$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \int_c^x |f| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + M\int_c^x g = \left|\int_a^c f\right| - M\int_a^c g + M\int_a^x g$$

avec $\int_a^x g \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, donc on a $d \in [c,b[$ tel que si $x \in [d,b[$, $\left|\int_a^c f\right| - M\int_a^c g \leqslant \int_a^x g$.

Ainsi, pour $x \in [d,b[$, $\left|\int_a^x f\right| \leqslant (M+1)\int_a^x g$ et $\int_a^x f = \underset{x\to b}{\mathrm{O}}\left(\int_a^x g\right)$.

CC BY NC SA

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un réel $c \in [a, b[$ tel que si $x \in [c, b[$, $|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} g(x)$. Si $x \in [c, b[$,

$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \int_c^x |f| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_c^x g = \left|\int_a^c f\right| - \frac{\varepsilon}{2}\int_a^c g + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g$$

avec $\displaystyle\int_a^x g \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, donc $\displaystyle\int_a^x g > 0$ au voisinage de b et $\dfrac{\left|\int_a^c f\right| - \frac{\varepsilon}{2}\int_a^c g}{\int_a^x g} \xrightarrow[x\to b]{} 0$ donc on a $d \in [c, b[$ tel que si $x \in [d, b[$, $\left|\int_a^c f\right| - \frac{\varepsilon}{2}\int_a^c g \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g$.

Ainsi, pour $x \in [d, b[$, $\left|\int_a^x f\right| \leqslant \varepsilon \int_a^x g$ et $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right)$.

(iii) Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $h = f - g = \underset{b}{\mathrm{o}}(g)$. Donc $\displaystyle\int_a^x h = \int_a^x f - \int_a^x g = \underset{b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x g\right)$ par (ii).

Donc $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$ □

Exercice

Soit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Réponse :

1. $+\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann divergente.
2. Intégration par parties : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} - \dfrac{\mathrm{e}}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^x \dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ car $\dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{t^2}\right)$ et application du théorème dans le cas de divergence, et $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ négligeable devant $f(x)$ qui tend vers $+\infty$, donc $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + \mathrm{o}\big(f(x)\big)$.