Suites de fonctions

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *définir les différents modes de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *énoncer deux théorèmes d'approximation uniforme choisis pour leur intérêt intrinsèque, les applications qu'ils offrent et l'interprétation qu'ils permettent en termes de densité.*

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple sur A.	
Convergence uniforme sur A. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a.	
Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $$u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$	Démonstration non exigible. Adaptation, si $A\subset\mathbb{R}$, aux cas où $a=+\infty$ et $a=-\infty$.
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in I$ soit $$U_n(x)=\int_a^x u_n, \quad U(x)=\int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment S, alors : $$\int_S u_n \to \int_S u.$$
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u'=v$.	Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur tout segment de I.
e) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.

TABLE DES MATIÈRES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I CONVERGENCES SIMPLE ET UNIFORME

1 Convergence simple

Définition : Convergence simple

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur X vers f** lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.

Remarque

C'est-à-dire $\forall x \in X,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon},\ \ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

Exemples

E 1 – $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \to \dfrac{n+x}{1+nx}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
On remarque que les f_n sont bornées mais pas f.

E 2 – $g_n : x \in [0,1] \to x^n$ converge simplement vers $g = \mathbb{1}_{\{1\}}$.
On remarque que les g_n sont continues mais pas g.

E 3 – On considère pour $n \geqslant 2$, h_n affine par morceaux telle que $h_n(0) = 0$, $h_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$ et $h_n(x) = 0$ si $\dfrac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1$.
La courbe a une forme de triangle afin de remarquer que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Alors $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ et on remarque que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.

2 Convergence uniforme

Définition : Convergence uniforme

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** X **vers** f lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall x \in X,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$.

Remarque

Graphiquement, à partir d'un certain rang, la courbe de f_n se situe dans la bande délimitée par les courbes $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.

Propriété

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Démonstration

Si on a un N qui convient pour tous les x, alors pour tout x , on a un N qui convient. □

Propriété

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ si et seulement si les à partir d'un certain rang les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Remarque

Mais rien n'indique que les f_n soient bornées à priori. Par exemple, $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{n}$ converge uniformément vers exp et aucune de ces fonctions n'est bornée.

Lemme

Si les f_n sont bornées et si elles convergent uniformément vers f, alors f est bornée.

Démonstration

Avec $\varepsilon = 1$, on a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall x \in X,\ \left|f(x)\right| - \left|f_n(x)\right| \leqslant \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant 1$.
En particulier, pour tout $x \in X$, $\left|f(x)\right| \leqslant \left|f_N(x)\right| + 1$. □

Propriété

Si les fonction $f_n : X \to \mathbb{K}$ sont bornées et $f : X \to \mathbb{K}$, alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f.$$

Démonstration

C'est bien la même définition. □

Propriété

Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$, alors la convergence n'est pas uniforme.

Démonstration

Si la convergence est uniforme, alors les $f_n - f$ sont bornées et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Or $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$. □

Méthode : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Puis pour prouver qu'il y a convergence uniforme :
  - ⋆ Soit on cherche à déterminer $\|f_n - f\|_\infty$ par exemple en étudiant les variations, puis on montre que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
  - ⋆ Soit on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \to 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X,\ \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- Ou, pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
  - ⋆ Soit les $(f_n)_n$ sont bornées mais pas f.
  - ⋆ Soit trouver $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

Exemples

E 1 – On reprend les mêmes exemples. Pour le premier, il n'y a pas convergence uniforme car f n'est pas bornée alors que les f_n le sont.

E 2 – $g_n : x \mapsto g^n$. Alors $\|g_n - g\|_\infty = 1$ ou bien $g_n(1 - 1/n) - g(1 - 1/n) \to \mathrm{e} \neq 0$. Il n'y a pas convergence uniforme.

E 3 – $h_n(1/n) - h(1/n) = n \not\to 0$.

Exercices

Ex 1 – CCINP 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Ex 2 – CCINP 13

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

   Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Remarques

R 1 – Soit $f : X \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à K^I, $x_0 \in \overline{X}$.
La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers** f **au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.
Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X, elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X, mais, malheureusement, la réciproque est fausse.

R 2 – Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers** f **au voisinage de** $+\infty$ lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $a > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Propriété

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X, alors elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X.

Remarque

La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas non plus la convergence uniforme sur X, ni la convergence au voisinage des bornes ouvertes de X.
De plus, la convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

Exemple

$g_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0,1[$, mais pas sur $[0,1[$ comme déjà vu.

II CONTINUITÉ ET LIMITE

1 Continuité

Théorème : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à K^I, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en x_0.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0.*

Alors

C1 *f est continue en x_0.*

Démonstration

Soit $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[= V$.
Alors, si $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leqslant \eta$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$.
Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f au voisinage de a fournit un rang N à partir duquel, pour tout $x \in V$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. C'est donc le cas pour $x = x_0$.
En prenant $n = N$, la continuité de f_N, fournit un $\delta > 0$ tel que sur $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f_N(x) - f_N(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Ainsi, si $|x - x_0| \leqslant \min(\eta, \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
Cela prouve bien que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$. □

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à K^I. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de chaque point de I (donc sur tout segment inclus dans I suffit).*

Alors

C1 *f est continue sur I.*

Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas uniforme continuité...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f.

Exemples

E 1 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$.

E 2 – CCINP 9 :

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Solution :

1. Cours.
2. (a) Limite simple : $\mathbb{1}_{\{0\}}$.
   (b) Continuité.
   (c) Oui.
   (d) Non : $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \not\to 0$.

2 Théorème de la double limite

Théorème : de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à K^I, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.

Remarque

⚠ Lorsque a est une borne ouvert de I, une convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas !

Démonstration

Non exigible. On traite le cas où a est fini.

Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leqslant |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.

On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$.

On suppose dorénavant que $n \geqslant N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leqslant 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leqslant 2 + |f(x_n)|$.

Mais comme les f_n convergent en a, elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a.

On obtient donc, pour $n \geqslant N$, $|b_n| \leqslant 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolezano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \to b$.

On montre alors que $b_n \to b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leqslant |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| + |f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}| + |b_{\varphi(n)} - b|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geqslant n$, on a alors aussi $|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W_n' et W_n'' de a sur lesquel $|b_n - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$ et $|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $|b_{\varphi(n)} - b| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geqslant \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W_n' \cap W_n''$, alors tire $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \to b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \to b$), qui est aussi continue a, donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$. □

Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas uniforme continuité...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$ alors que ces limites existent.

Remarque

La convergence sur tout segment ne suffit pas si $a \notin I$ (mais lorsque $a \in I$, c'est simplement la continuité en a.)

Exemple

$g_n : x \mapsto x^n$ en $a = 1$: le résultat ne tient pas malgré la convergence uniforme sur tout segment.

III INTÉGRATION

Théorème : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 *f est continue sur $[a,b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

On suppose $a \leqslant b$ quitte à multiplier par -1.

$\displaystyle\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$ □

Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas uniforme continuité...

Il suffit qu'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Théorème : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *$(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

Démonstration

Sur un segment $[b,c]$ de I, on note $m = \min(a,b,c)$ et $M = \max(a,b,c)$. On calcule

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant |x-a|\,\|f_n - f\|_{\infty,[a,x]} \leqslant (M-m)\,\|f_n - f\|_{\infty,[m,M]} \to 0$$

d'où la conclusion. □

Remarque

En fait, le premier théorème est une conséquence du second, en prenant $I = [a,b]$, on obtient bien $g_n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(b)$.

IV DÉRIVATION

Théorème : Interversion limite et dérivée

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*

H3 *La suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

C2 *$f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f'_n$.*

C3 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Remarque

Vrai avec l'hypothèse plus faible de dérivabilité des f_n, mais hors-programme.

Démonstration

- Le théorème de transfert de continuité nous donne déjà la continuité de g sur I (avec **H1** et **H3**).
- Soit $a \in I$. On pose $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a)$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème précédent, (g_n) converge uniformément vers g sur tout segment de I, donc en particulier converge simplement vers g.
  Or pour tout $x \in I$, $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) - f(a)$, donc par unicité de la limite, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée h.
- Si S segment de I, $x \in S$,

$$|f_n(x) - f(x)| = |g_n(x) + g_n(a) - g(x) - g(a)| \leqslant |g_n(x) - g(x)| + |f_n(a) - f(a)| \leqslant \|g_n - g\|_{\infty,S} + |f_n(a) - f(a)|$$

  qui est indépendant de x et converge vers 0. Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I. □

Théorème : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction h_k sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_p.*

Alors

C1 *$f = h_0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.*

C3 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I.*

Démonstration

On applique le théorème précédent à toutes les dérivées successives, de la nº p à la nº 1. □

V APPROXIMATIONS UNIFORMES

1 Par des polynômes

Théorème : de Weierstraß

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Énoncé équivalent : Soit f continue sur le segment $[a,b]$. Il existe une suite fonction $(p_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur $[a,b]$, c'est-à-dire $\|p_n - f\|_\infty \to 0$.

Énoncé équivalent : Soit f continue sur le segment $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|p-f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Démonstration

Non exigible. Preuve classique par les polynômes de Bernstein en TD. □

Corollaire

L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$.

Remarque

Le résultat ne tient plus sur un intervalle non borné. Plus précisément, on montre qu'une limite uniforme de fonctions polynomiales est alors polynomiale (voir TD).

2 Par des fonctions en escalier

Théorème

Toute fonction continue par morceau sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Remarque

On montre que pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver φ telle que $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Alors, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, on obtient φ_n telle que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f.

Démonstration

Cas continu Soit $\varepsilon>0$. Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$. On a donc $\eta>0$ tel que

$$\forall x,y\in[a,b],\quad |x-y|\leqslant\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ de pas $h=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(a_{k+1}-a_k)\leqslant\eta$.

On définit alors $\varphi : x\mapsto \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x\in[a_k,a_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x=b \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x\in[a,b[$, on a k tel que $x\in[a_k,a_{k+1}[$ et $|x-a_k|\leqslant|a_{k+1}-a_k|\leqslant\eta$ donc $|f(x)-\varphi(x)|=|f(x)-f(a_k)|\leqslant\varepsilon$, soit $x=b$ et $|f(b)-\varphi(b)|=0\leqslant\varepsilon$.

On a donc bien $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

Cas continu par morceaux Soit $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f.

Chaque $f_{|]a_k,a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction f_k continue sur $[a_k,a_{k+1}]$: on a $\varphi_k \in \mathscr{E}([a,b])$ telle que $\left\| f_k - \varphi_j \right\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

On pose alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in \,]a_k,a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a,b]$, soit on a k tel que $x \in]a_k,a_{k+1}[$ et $|\varphi(x) - f(x)| = |\varphi_k(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon$ soit on a k tel que $x = a_k$ et $|\varphi(a_k) - f(a_k)| = 0 \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Remarque

Dans le cas d'une fonction continue, en prenant φ_n ainsi définie pour une subdivision régulière $(a_0,\dots,a_n)$, on obtient par convergence uniforme que $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ ce qui redonne le résultat sur les sommes des Riemann.

Corollaire

L'ensemble $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

VI EXTENSION AUX FONCTIONS VECTORIELLES

$(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie non vide de E.
Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles ouverts.

Définition : Convergence simple, convergence uniforme

Soit $f : A \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A.
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur A vers f** lorsque pour tout $x \in A$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. C'est-à-dire

$$\forall x \in A,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon},\ \ \left\|f_n(x) - f(x)\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur I vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \ \forall x \in A,\ \ \left\|f_n(x) - f(x)\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Remarque

Il y a convergence uniforme au voisinage de $x_0 \in \overline{A}$ lorsqu'il existe $\eta >$ tel qu'il y ait convergence uniforme sur $A \cap B(x_0,\eta)$.

Théorème : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $x_0 \in I$. On suppose que

- **H1** *Pour tout n, f_n est continue en x_0 (respectivement sur A).*
- **H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0 (respectivement au voisinage de chaque point de A).*

Alors

- **C1** *f est continue en x_0 (respectivement sur A).*

Théorème : de la double limite

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que

H1 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors on a $b \in F$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim\limits_{x \to a}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\right)$.

Pour les intégrations et dérivations, la variable est réelle.

Théorème : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 *f est continue sur $[a, b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *$(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

Théorème : Interversion limite et dérivée

Soient $f : I \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*

H3 *La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

C2 *$f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.*

C3 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Théorème : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction h_k sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_p.*

Alors

C1 *$f = h_0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $\left(\lim f_n\right)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.*

C3 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I.*