# Suites de fonctions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $X$ une partie non vide $\mathbb{R}$.

## I CONVERGENCES SIMPLE ET UNIFORME

### 1 Convergence simple

**Définition : Convergence simple**

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur** $X$ **vers** $f$ lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.

### 2 Convergence uniforme

**Définition : Convergence uniforme**

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** $X$ **vers** $f$ lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de $x$. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall x \in X,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$.

**Propriété**

*La convergence uniforme implique la convergence simple.*

**Propriété**

*$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ si et seulement si les à partir d'un certain rang les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur $X$ et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.*

**Lemme**

*Si les $f_n$ sont bornées et si elles convergent uniformément vers $f$, alors $f$ est bornée.*

**Propriété**

*Si les fonction $f_n : X \to \mathbb{K}$ sont bornées et $f : X \to \mathbb{K}$, alors*

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f.$$

**Propriété**

*Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$, alors la convergence n'est pas uniforme.*

**Méthode : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$**

- On étudie la convergence simple et on note $f$ la limite.
- Puis pour prouver qu'il y a convergence uniforme :
  - ⋆ Soit on cherche à déterminer $\|f_n - f\|_\infty$ par exemple en étudiant les variations, puis on montre que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
  - ⋆ Soit on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \to 0$ indépendant de $x$ tel que $\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- Ou, pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
  - ⋆ Soit les $(f_n)_n$ sont bornées mais pas $f$.
  - ⋆ Soit trouver $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

### 3 Convergence uniforme locale

On suppose que $X$ est une réunion d'intervalles.

**Propriété**

*Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur tout segment inclus dans $X$, alors elle converge uniformément vers $f$ au voisinage de tout point de $X$.*

# II Continuité et limite

### 1 Continuité

**Théorème : Limite uniforme de fonctions continues**

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $K^I$, $x_0 \in I$. On suppose que*

**H1** *Pour tout $n$, $f_n$ est continue en $x_0$.*

**H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ au voisinage de $x_0$.*

*Alors*

**C1** *$f$ est continue en $x_0$.*

**Corollaire**

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $K^I$. On suppose que*

**H1** *Pour tout $n$, $f_n$ est continue sur $I$.*

**H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ au voisinage de chaque point de $I$ (donc sur tout segment inclus dans $I$ suffit).*

*Alors*

**C1** *$f$ est continue sur $I$.*

**Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas uniforme continuité...**

Il suffit que les $f_n$ soient continues mais pas $f$.

### 2 Théorème de la double limite

**Théorème : de la double limite**

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $K^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que*

**H1** *$(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ au voisinage de $a$.*

**H2** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

*Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que*

**C1** *$b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$*

**C2** *$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$*

*Autrement dit, les limites existant bien : $\lim\limits_{x \to a} \left( \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left( \lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$.*

**Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas uniforme continuité...**

Il suffit d'avoir $a$ tel qu'on n'ait pas $\lim\limits_{x \to a} \left( \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left( \lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$ alors que ces limites existent.

# III Intégration

**Théorème : Interversion limite et intégrale**

*Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que*

**H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $[a, b]$*

**H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$*

*alors*

**C1** *$f$ est continue sur $[a, b]$*

**C2** $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas uniforme continuité...**

Il suffit qu'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Théorème : Convergence uniforme de primitive**

*Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$, $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (sous réserve d'existence donnée par les continuités). On suppose que*

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $I$.*
- **H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur tout segment de $I$.*

*Alors*

- **C1** *$f$ est continue sur $I$*
- **C2** *$(g_n)_n$ converge uniformément vers $g$ sur tout segment de $I$.*

# IV DÉRIVATION

**Théorème : Interversion limite et dérivée**

*Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que*

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$.*
- **H2** *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f$ sur $I$.*
- **H3** *La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de $I$ vers une fonction $h$.*

*Alors*

- **C1** *$f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$.*
- **C2** *$f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.*
- **C3** *$(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur tout segment de $I$.*

**Théorème : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$**

*Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que*

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ de classe $\mathscr{C}^p$ sur $I$.*
- **H2** *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction $h_k$ sur $I$.*
- **H3** *La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de $I$ vers une fonction $h_p$.*

*Alors*

- **C1** *$f = h_0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $I$.*
- **C2** *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.*
- **C3** *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément vers $h_k$ sur tout segment de $I$.*

# V APPROXIMATIONS UNIFORMES

## 1 Par des polynômes

**Théorème : de Weierstraß**

*Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.*

*Énoncé équivalent : Soit $f$ continue sur le segment $[a, b]$. Il existe une suite fonction $(p_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $\|p_n - f\|_\infty \to 0$.*

*Énoncé équivalent : Soit $f$ continue sur le segment $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p$ telle que $\|p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

**Corollaire**

*L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est dense dans $(\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.*

## 2 Par des fonctions en escalier

**Théorème**

*Toute fonction continue par morceau sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.*

**Corollaire**

*L'ensemble $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$.*

# VI Extension aux fonctions vectorielles

$(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. $A$ est une partie non vide de $E$.

Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles ouverts.

**Définition : Convergence simple, convergence uniforme**

Soit $f : A \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $F^A$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur** $A$ **vers** $f$ lorsque pour tout $x \in A$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. C'est-à-dire

$$\forall\, x \in A,\quad \forall\, \varepsilon > 0,\quad \exists\, N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N},\quad \forall\, n \geqslant N_{x,\varepsilon},\quad \left\|f_n(x) - f(x)\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** $I$ **vers** $f$ lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de $x$. Autrement dit lorsque

$$\forall\, \varepsilon > 0,\quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon,\quad \forall\, x \in A,\quad \left\|f_n(x) - f(x)\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

**Théorème : Limite uniforme de fonctions continues**

*Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $F^A$, $x_0 \in I$. On suppose que*

**H1** *Pour tout $n$, $f_n$ est continue en $x_0$ (respectivement sur $A$).*

**H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ au voisinage de $x_0$ (respectivement au voisinage de chaque point de $A$).*

*Alors*

**C1** *$f$ est continue en $x_0$ (respectivement sur $A$).*

**Théorème : de la double limite**

*Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $F^A$, $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que*

**H1** *$(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ au voisinage de $a$.*

**H2** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

*Alors on a $b \in F$ tel que*

**C1** $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

**C2** $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$

*Autrement dit, les limites existant bien :* $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$.

Pour les intégrations et dérivations, la variable est réelle.

**Théorème : Interversion limite et intégrale**

*Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que*

**H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $[a,b]$*

**H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$*

*alors*

**C1** *$f$ est continue sur $[a,b]$*

**C2** $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

**Théorème : Convergence uniforme de primitive**

*Soient* $f : I \to F$ *et* $(f_n)_n$ *une suite de fonction de* $F^I$, $a \in I$, $g_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $g : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *(sous réserve d'existence donnée par les continuités). On suppose que*

**H1** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ *est continue sur* $I$.

**H2** *La suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* $f$ *sur tout segment de* $I$.

*Alors*

**C1** $f$ *est continue sur* $I$

**C2** $(g_n)_n$ *converge uniformément vers* $g$ *sur tout segment de* $I$.

**Théorème : Interversion limite et dérivée**

*Soient* $f : I \to F$ *et* $(f_n)_n$ *une suite de fonction de* $F^I$. *On suppose que*

**H1** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $I$.

**H2** *La suite* $(f_n)_n$ *converge simplement vers* $f$ *sur* $I$.

**H3** *La suite* $(f_n')_n$ *converge uniformément sur tout segment de* $I$ *vers une fonction* $h$.

*Alors*

**C1** $f$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $I$.

**C2** $f' = h$ *c'est-à-dire* $\left(\lim f_n\right)' = \lim f_n'$.

**C3** $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* $f$ *sur tout segment de* $I$.

**Théorème : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$**

*Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonction de* $F^I$, $p \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que*

**H1** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ *de classe* $\mathscr{C}^p$ *sur* $I$.

**H2** *Pour tout* $k \in [\![0, p-1]\!]$, *la suite* $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ *converge simplement vers une fonction* $h_k$ *sur* $I$.

**H3** *La suite* $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* $I$ *vers une fonction* $h_p$.

*Alors*

**C1** $f = h_0$ *est de classe* $\mathscr{C}^p$ *sur* $I$.

**C2** *Pour tout* $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ *c'est-à-dire* $\left(\lim f_n\right)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.

**C3** *Pour tout* $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ *converge uniformément vers* $h_k$ *sur tout segment de* $I$.