

CHAPITRE VIII

Fonctions vectorielles et arcs paramétrés

Extrait du programme officiel :

Ce chapitre poursuit trois objectifs :

- étendre le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;
- préciser les notions de tangente et de vitesse instantanée ;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans un espace normé de dimension finie E .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Dérivabilité en un point

Dérivabilité en un point.

Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1.
Interprétation cinématique.
 \Leftrightarrow PC : vitesse instantanée.
Traduction par les coordonnées dans une base de E .

Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.

b) Opérations sur les fonctions dérivables

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire.

Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire.

Cas du produit scalaire.

\Leftrightarrow PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.

Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.

Applications de classe \mathcal{C}^k . Opérations sur les applications de classe \mathcal{C}^k .

\Leftrightarrow PC et SI : vecteur accélération.

c) Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de \mathbb{R} , à valeurs dans E .

Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\int_{[a,b]} f$,
 $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.
 \Leftrightarrow PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.

Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.

Inégalité $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.

Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.

e) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

f) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe \mathcal{C}^n .

Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe \mathcal{C}^n .

Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

g) Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans E . Paramètre régulier.

Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Exemples simples d'arcs paramétrés plans.

Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.
L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme.
La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme.
⇔ I : réalisation de tracés à l'aide de l'outil informatique.

Table des matières

VIII FONCTIONS VECTORIELLES ET ARCS PARAMÉTRÉS

I	Dérivabilité d'une fonction vectorielle	3
1	Définition	3
2	Opérations sur les fonctions dérivables	4
3	Applications de classe \mathcal{C}^n	5
4	Théorèmes sur les fonctions numériques (révisions de MPSI)	7
II	Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle	9
1	Fonctions continues pas morceaux	9
2	Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux	10
3	Sommes de Riemann	11
4	Intégrale et primitive	12
5	Intégration par parties	13
6	Changement de variable	13
7	Calcul de primitives et d'intégrales (Rappels)	13
a	Calculs directs	13
b	L'intégration par parties	14
c	Le changement de variable	14
d	Les fractions rationnelles	14
e	Les fonctions trigonométriques	14
f	Les fonctions hyperboliques	15
g	Les fonctions avec radical	15
III	Formules de Taylor	15
1	Taylor reste intégral	15
2	Inégalité de Taylor-Lagrange	16
3	Formule de Taylor-Young	17
IV	Arcs paramétrés	18
1	Définition	18
2	Régularité	18
3	Étude locale, tangente	19
4	Plan d'étude d'un arc paramétré plan	19

Dans ce chapitre, on désigne par \mathbb{K} l'un des deux corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit I, J des intervalles de \mathbb{R} d'intérieurs non vides.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ des \mathbb{K} -espaces vectoriels **de dimension finie** non réduits au vecteur nul.

I DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION VECTORIELLE

1 Définition

Définition : Dérivée

Soit $f: I \rightarrow E$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable au point a** si et seulement si $\frac{1}{x-a}(f(x) - f(a))$ a une limite lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ a une limite lorsque $h \rightarrow 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ et appelée **dérivé de f au point a** .

f est dérivable sur I lorsqu'elle l'est en tout $a \in I$. Alors $f' = \frac{df}{dx} : \begin{cases} I & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$ est la **fonction dérivée** de f .

Propriété : DL₁

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a , c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h \cdot \varepsilon(h) = f(a) + hb + o(h)$$

où $b \in E$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0_E$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Démonstration

□

Corollaire : dérivable \implies continue

Si f est dérivable en a (respectivement sur I), alors f est continue en a (respectivement sur I). La réciproque est fautive.

Démonstration

□

Remarque

Comme pour les fonctions numériques, on définit aussi des dérivées à gauche et à droite de a (lorsque c'est possible) notée $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$: ce sont les dérivées des restrictions à $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ de f , et on a f dérivable en a si et seulement si elle l'est à gauche et à droite et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) ssi pour tout k , f_k l'est et alors $f'(a) = \sum_{k=1}^n f'_k(a) e_k$ (respectivement

$$f' = \sum_{k=1}^n f'_k e_k).$$

Démonstration

Conséquence de la propriété analogue sur la limite appliquée au taux d'accroissement.

□

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété : Linéarité

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable de dérivée la combinaison linéaire des dérivées.

Démonstration

Avec DL₁.

□

Propriété : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f : I \rightarrow E$ dérivable sur I , alors $u \circ f$ est dérivable, de dérivée $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Remarque

⚠ ne pas confondre avec la formule de dérivée d'une composée !

DémonstrationAvec DL₁.**Exemple**

La projection du vecteur vitesse est le vecteur vitesse de la projection du mouvement.

Propriété : Image par une application bilinéaire

Si $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $f : I \rightarrow E$, $g : I \rightarrow F$ dérivables sur I , on note $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$.
 Alors $B(f, g)$ dérivable sur I et $(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

DémonstrationDL₁ ou mieux : taux d'accroissement...**Remarque**

Se généralise aux applications multilinéaires.

Exemple

Dérivation d'un déterminant.

CorollaireDérivée d'un produit fg où $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \rightarrow E$.**Corollaire**

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dans un espace euclidien.

Propriété : CompositionSi $f : I \rightarrow E$, $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables tel que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ dérivable et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f' \circ \varphi$.**Démonstration**DL₁.**Propriété : Dérivée de la réciproque**

Si $f : I \rightarrow J$ bijective et dérivable sur I , alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x) ; x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
 De plus, lorsque $f'(x) = 0$, f^{-1} présente une tangente verticale en $f(x)$.

3 Applications de classe \mathcal{C}^n

Définition : Classe f est dite **de classe** \mathcal{C}^0 sur I si elle est continue sur I . f est dite **de classe** \mathcal{C}^n sur I si elle est k fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I . f est dite **de classe** \mathcal{C}^∞ si elle est de classe \mathcal{C}^n pour tout n , c'est-à-dire si elle est indéfiniment dérivable.**Remarque**On peut être dérivable sans être de classe \mathcal{C}^1 .

Exemple

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par 0 en 0.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $p = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$.

f est de classe \mathcal{C}^n sur I si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_k l'est et alors si $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_k^{(n)} e_k$.

Démonstration

Récurrence. □

Propriété : Linéarité

$\mathcal{C}^n(I, E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et si $n \in \mathbb{N}$ et si $f, g \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$.

Démonstration

Récurrence. □

Propriété : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ alors $u \circ f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et si $n \in \mathbb{N}$, $(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$.

Démonstration

Récurrence. □

Exemple

La projection du vecteur accélération est le vecteur accélération de la projection du mouvement.

Propriété : Formule de Leibniz

Si $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, $g \in \mathcal{C}^n(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, G)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}).$$

Démonstration

Récurrence. □

Corollaire

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{C}^n(I, E)$ alors $f \cdot g \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Propriété : Composition

Si $f : I \rightarrow E$, $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n telles que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ de classe \mathcal{C}^n sur J .

DémonstrationPar récurrence. □**Propriété : Réciproque d'une bijection**Soit $f : I \rightarrow J$ bijective de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$.Alors f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .**Remarque**Si f est bijective et f, f^{-1} sont de classe \mathcal{C}^k , on parle de \mathcal{C}^k -difféomorphisme (HP).**4 Théorèmes sur les fonctions numériques (révisions de MPSI)****Propriété : Condition nécessaire d'extremum local**Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$ tel que**H1** $a \in \overset{\circ}{I}$ **H2** f est dérivable en a **H3** f admet un extremum local en a Alors a est un pont critique de $f : f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse.

DémonstrationSi, par exemple, f admet un maximum local en a , alors si $x > a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et si $x < a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Donc la limite commune $f'(a)$ est à la fois positive et négative donc nulle. □**Théorème : de Rolle**Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si**H1** f est continue sur $[a, b]$ **H2** f est dérivable sur $]a, b[$ **H3** $f(a) = f(b)$ Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.**Remarques****R1** – La conclusion s'écrit aussi $\exists t \in]0, 1[, f'(a + th) = 0$ où $h = b - a$.**R2** – **Interprétation cinématique** : Si un mobile M a une trajectoire **rectiligne** tel que $M(t_0) = M(t_1)$ alors il existe un instant $t \in]t_0, t_1[$ tel que $v_M(t) = 0$.**R3** – N'est plus vrai dans \mathbb{C} : prendre une trajectoire circulaire.**Démonstration**Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes $m = \min f$ et $M = \max f$.

- Si $m = M$, alors f est constante et tout $c \in]a, b[$ convient.
- Si $m < M$,
 - ★ Si $f(a) \neq M$, on a $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$, avec $f(c) \neq f(a) = f(b)$, donc $c \in]a, b[$.
Comme c est un extremum global (donc local) de f , c n'est pas une borne de $[a, b]$ et f est dérivable en c , on a $f'(c) = 0$.
 - ★ Si $f(a) = f(b) = M$, alors $f(a) \neq m$ donc on a $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = m$, avec $f(c) \neq f(a) = f(b)$, donc $c \in]a, b[$.
Comme c est un extremum global (donc local) de f , c n'est pas une borne de $[a, b]$ et f est dérivable en c , on a $f'(c) = 0$. □

Théorème : (ou égalité) des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$

Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ie $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.

Remarques

R1 – Le résultat s'écrit encore $\exists t \in]0, 1[, f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + t(b - a)) = 0$ ie $f(a + h) = f(a) + hf'(a + th)$ où $h = b - a$.

R2 – Ce résultat généralise a priori le théorème de Rolle, mais y est en fait strictement équivalent car on va utiliser ce théorème dans la preuve.

Démonstration

Important : technique usuelle.

But : trouver $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$.

Méthode : former la différence, faire varier b et remplacer $f'(c)$ par un constante.

On pose $\varphi : \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow f(x) - f(a) - A(x - a) \end{cases}$ où A est choisie telle que $\varphi(b) = 0$, c'est-à-dire $A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Alors φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Donc d'après le théorème de Rolle, on a $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0 = f'(c) - A$. □

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$

H3 $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$

Alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis. □

Corollaire

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur I

H2 f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$

H3 $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq k$

Alors f est k -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Démonstration

Si $x < y$, on applique l'inégalité des accroissements finies à f sur $[x, y]$ avec $-k \leq f' \leq k$ sur $]x, y[$. □

Théorème : de la limite de la dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$

H2 f est continue en a

H3 $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$

Alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Donc

- soit $\ell = \pm\infty$ et \mathcal{C}_f admet une tangente verticale en a ,
- soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a .

Remarques

R1 – Si f' n'a pas de limite en a , on ne peut pas conclure.

Exemples

E1 – $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

f est dérivable sur \mathbb{R}^* et si $x \neq 0$, $f' : x \mapsto 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ qui n'a pas de limite en 0. Et pourtant $\frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ (mais f' n'est pas continue en 0).

E2 – $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0. f n'est pas dérivable en 0 et $f' : x \mapsto \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (avec $x_n = n\pi$).

R2 – Il faut que f soit continue en a : par exemple, $f : x \mapsto \delta_{x,0}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f'(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et pourtant f n'est pas dérivable en 0.

R3 – Ce théorème donne aussi la continuité au point de la dérivée : et donc un caractère localement \mathcal{C}^1 . Cependant, une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue. Donc ne pas pouvoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable !

Démonstration

Si $x \in I$ tel que $x > a$, f est continue sur $[a, x]$, dérivable sur $]a, x[$, par théorème des accroissements finis, on a $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Comme $a \leq c_x \leq x$, si $x \rightarrow a^+$, $f'(c_x) \rightarrow \ell$ et donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ par composition des limites.

On montre de même que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$. □

Théorème : du prolongement \mathcal{C}^n

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(i)}$ a une limite finie en a . Alors le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I .

Démonstration

Comme f a une limite finie en a , on la prolonge en posant $\tilde{f}(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. On vérifie qu'alors \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^n en a également.

Comme \tilde{f} est continue en a , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\tilde{f}' = f'$ a une limite finie en a , alors par théorème de la limite de la dérivée, \tilde{f} est dérivable en a et sa dérivée est continue en a .

On obtient ainsi, par récurrence finie que pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\tilde{f}^{(p)}$ est dérivable en a et à dérivée continue en a . □

II INTÉGRATION SUR UN SEGMENT D'UNE FONCTION VECTORIELLE**1 Fonctions continues pas morceaux**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition : Fonctions continues par morceaux

Une application $f : [a, b] \rightarrow E$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de $[a, b]$ telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est adaptée à f .

On note $\mathcal{C}_m([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$. f est continue par morceaux ssi pour tout k , f_k l'est.

Corollaire : Opérations

Si $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$, $\varphi \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \mapsto \|f(x)\|$, $f + \lambda g$ et $\varphi \cdot f$ sont continues par morceaux.

Remarque

$\mathcal{C}_m([a, b], E)$ est un K -espace vectoriel.

Propriété

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Définition

Si I est un intervalle d'intérieur non vide, f est dite **continue par morceaux sur I** lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I .

2 Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Propriété : Indépendance du choix de la base

Si $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$. Alors $\sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) e_k$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} .

Définition : Intégrale sur un segment

Si $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ le vecteur $\int_{[a, b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) e_k$.

On pose $\int_a^a f(t) dt = 0_E$ et $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$.

Propriété : Linéarité

$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une application linéaire de $\mathcal{C}_m([a, b], E)$.

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. □

Propriété : Relation de Chasles

Si $f \in \mathcal{C}_m(I, E)$ et $a, b, c \in I$, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. □

3 Sommes de Riemann

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision et pour tout k entre 0 et $n-1$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$ alors on pose la somme de Riemann $R(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$.

Pour une fonction numérique, cela correspond à une somme d'aires de rectangles.

Si la subdivision est régulière, pour tout k , $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$ et pour tout k , $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

On obtient alors $S(f, \sigma, \xi) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$.

Et si on prend les rectangles à gauche, on a alors $\xi_k = a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Dans ce cas, $S(f, \sigma, \xi) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$.

Théorème

Si $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$, alors $R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème vu en première année sur les fonctions numériques aux coordonnées dans une base. □

Exemples

E1 – Limite de $\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$. Retrouver la nature de la série harmonique.

E2 – Calculer $I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Théorème : Inégalité triangulaire intégrale

Si $f \in \mathcal{C}_m(I, E)$, $a, b \in I$, $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|f(t)\| dt \right|$.
(La valeur absolue sert à remettre les bornes dans le bon sens.)

Démonstration

Si $a = b$, il n'y a rien à faire.

Si $a < b$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $\|S_n(f)\| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f(t)\|$ donc en faisant $n \rightarrow +\infty$, par continuité de la norme et $\|f\|$ étant continue par morceau, $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$.

Si $a > b$, il suffit de remettre les bornes dans le bon sens. □

4 Intégrale et primitive

Définition : Primitive

$g : I \rightarrow E$ est une **primitive** de $f : I \rightarrow E$ si g dérivable sur I et $g' = f$.

Propriété

$f : I \rightarrow E$ dérivable sur I est constante si et seulement si $f' \equiv 0_E$ sur I .

Démonstration

Si f est constante c'est la définition.
Si $f' \equiv 0$, alors, en passant par les coordonnées, f est constante. □

Remarque

La constante dépend de l'intervalle !

Propriété

Soit $f : I \rightarrow E$, F, G deux primitives de f sur I , avec I **intervalle**.
Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I, F(x) = G(x) + C$.

Démonstration

$F' - G' \equiv 0$ sur l'intervalle I . □

Théorème : fondamental de l'analyse

Si f est continue sur un intervalle I à valeurs dans E et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. □

Corollaire

- (i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.
- (ii) Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I , $a, b \in I$, $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- (iii) Si f est de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.
- (iv) **Inégalité des accroissements finis :**
Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $\|f'\| \leq k$, alors f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$.

Démonstration

- (ii) $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et $F - F(a)$ sont deux primitives de f sur l'intervalle I s'annulant en a , donc sont égales.
- (iii) f primitive de f' .

(iv) Si $x < y$, $\|f(x) - f(y)\| = \left\| \int_x^y f'(t) dt \right\| \leq k|x - y|$. □

Propriété

Soient I, J intervalles de \mathbb{R} , $u, v : I \rightarrow J$ dérivables, $f : J \rightarrow E$ continue.

L'application $\varphi : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \end{cases}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $\varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Démonstration

Si F primitive de f , $\varphi = F \circ v - F \circ u$. □

5 Intégration par parties

Propriété

Si $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, $v \in \mathcal{C}^1(I, E)$,

$$\forall a, b \in I, \int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Remarques

- R1 – En fait, u, v dérivables et u', v' continues par morceaux suffit.
- R2 – On a plus généralement,

Démonstration

$(uv)' = u'v + uv'$ puis intégrer entre a et b . □

Exemple

Équivalent de $f(x) = \int_1^x e^t \ln t dt$ en $+\infty$.

$$f(x) = e^x \ln x - \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \text{ et si } x \geq 1, 0 \leq \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \leq e^x - e = o(e^x \ln x).$$

6 Changement de variable

Propriété

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 , $f \in \mathcal{C}(I, E)$, $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u) \cdot f(\varphi(u)) du$.

Démonstration

Si F primitive de f , $(F \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f \circ \varphi$. □

7 Calcul de primitives et d'intégrales (Rappels)



Méthode : Technique de calcul de primitives et d'intégrales

a

Calculs directs

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle

(imaginaire).

b L'intégration par partiesFonction dont la dérivée est plus simple... ...comme par exemple les fonctions \ln , Arccos , Arcsin , Arctan , etc.**Exemple**

$$\int \ln x \, dx.$$

Abaissement du degré, formule de récurrence**Exemple**

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

c Le changement de variableOn veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$: C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.On veut calculer $\int f(x)dx$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe \mathcal{C}^1 . Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

d Les fractions rationnellesParfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1 - 1$ permettent de calculer les primitives.Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|t-a|.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur $ax^2 + bx + c$ au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$, qui se primitive en \ln et Arctan :

- On se débarrasse du x au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax + b$ du dénominateur et on intègre en \ln ,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en Arctan .

e Les fonctions trigonométriquesSi on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poser $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :**Règles de Bioche**Si « $f(x)dx$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- Sinon on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le dx !!**Exemples**

$$\text{E1} - I = \int_0^{\pi/2} \sin^5 t \, dt.$$

$$\text{E2} - I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 + \cos^2 x} dx.$$

$$\text{E3} - \int \frac{1}{\cos x} dx.$$

**Les fonctions hyperboliques**

Pour les fonctions faisant intervenir ch , sh , th et \exp , on peut poser $t = e^x$ ($\text{ch } x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$, $\text{sh } x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$, $\text{th}(x) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en ch , sh , th , il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement ch , sh , th par \cos , \sin , \tan respectivement.

**Les fonctions avec radical**

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(ax+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = ax + \beta$. Ensuite, pour :
 - ★ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \text{sh } u$ ($\text{sh}^2 + 1 = \text{ch}^2$) ou $t = \tan u$ ($1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
 - ★ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm \text{ch } u$ suivant le signe de t . ($\text{ch}^2 - 1 = \text{sh}^2$.)
 - ★ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ ($1 - \cos^2 = \sin^2$ et $1 - \sin^2 = \cos^2$.)

Exemple

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

III FORMULES DE TAYLOR

Définition

Si f est n fois dérivable en a , son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d , pour tout $n \geq d + 1$, $R_n \equiv 0$.

On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

1 Taylor reste intégral

Théorème

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Remarque

À connaître **PARFAITEMENT**.

Pour s'en rappeler : tester pour $n = 0$ et plus de a sous l'intégrale.

Démonstration

Par récurrence sur n .

- Si $n = 0$, $f \in \mathcal{C}^1(I)$, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.
- Si c'est vrai pour un $n \geq 0$, $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I)$, par hypothèse de récurrence, si $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Par intégration par parties, $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ étant de classe \mathcal{C}^1 ,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence. \square

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I , $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

Remarque

Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour $p=0$?

Démonstration

- Pas de problème si $x = a$.
- Si $x > a$, par Taylor reste intégrale, les bornes étant dans le bon sens,

$$\begin{aligned} \|R_n(x)\| &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \leq \int_a^x \left\| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| dt \\ &\leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \|f^{(n+1)}(t)\| dt \end{aligned}$$

Comme $\|f^{(n+1)}\|$ est continue sur le segment $[a, x]$, elle est bornée donc $\sup_{t \in [a,x]} \|f^{(n+1)}(t)\|$ existe et, tout étant positif et les bornes dans le bon sens toujours,

$$\|R_n(x)\| \leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \sup_{[a,x]} \|f^{(n+1)}\| dt = \sup_{[a,x]} \|f^{(n+1)}\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,x]} \|f^{(n+1)}\|$$

- Si $x < a$,

$$\begin{aligned} \|R_n(x)\| &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} \|f^{(n+1)}(t)\| dt \\ &\leq \sup_{[x,a]} \|f^{(n+1)}\| \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} dt = \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[x,a]} \|f^{(n+1)}\|. \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tz}$ vérifie les bonnes hypothèses sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = z^n$.

$|f^{(n+1)}(t)| = |z^{n+1} e^{tz}| = |z|^{n+1} e^{t\Re(z)} \leq |z|^{n+1} e^{t\Re(z)} \leq |z|^{n+1} \max(1, e^{\Re(z)}) = M(z)$ donc

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} M(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

\square

3 Formule de Taylor-Young

Ayant défini la négligeabilité, on peut, comme pour les fonctions numériques, calculer des développements limités vectoriels.

Propriété : Primitivation de DL

Soit $f : I \rightarrow E$ admettant un $DL_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(a)$

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f .

Démonstration

$$\text{Soit } \varphi(h) = F(a+h) - F(a) - a_0h - \frac{a_1}{2}h^2 - \dots - \frac{a_n}{n+1}h^{n+1}.$$

On veut montrer que $\varphi(h) = o(h^{n+1})$.

Or φ est dérivable sur I et $\varphi' : h \mapsto f(a+h) - a_0 - \dots - a_n h^n = o(h^n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que si $|t| \leq \eta$, $\|\varphi'(t)\| \leq \varepsilon|t|^n$.

- En particulier, si $h \neq 0$ et $|h| \leq \eta$, alors $\|\varphi'(t)\| \leq \underbrace{\varepsilon|h|^n}_{\text{indépendant de } t}$ sur $]0, h[$.

Par inégalité des accroissements finis, φ étant de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, h[$ en supposant de plus f continue, $\|\varphi(h) - \varphi(0)\| = \|\varphi(h)\| \leq \varepsilon|h|^n|h-0| = \varepsilon|h|^{n+1}$.

Notons que pour l'inégalité des accroissements finis vectorielle, nous avons besoin de la classe \mathcal{C}^1 de φ et donc la continuité de f (en fait f continue par morceaux suffit), mais elle est valable pour φ continue sur $[0, h]$ et dérivable sur $]0, h[$ (hors-programme pour une fonction vectorielle).

- Autre rédaction possible (demandant par contre forcément f au moins continue par morceaux), si $h > 0$,

$$\|\varphi(h)\| = \|\varphi(h) - \varphi(0)\| = \left\| \int_0^h \varphi'(t) dt \right\| \leq \int_0^h \|\varphi'(t)\| dt \leq \int_0^h \varepsilon|t|^n dt \leq \varepsilon|h|^{n+1}.$$

On peut faire un calcul semblable si $h < 0$ en renversant les bornes de l'intégrale.

Donc $\varphi(h) = o(h^{n+1})$. □

Remarque

⚠ Comme pour les fonctions numériques, on peut aussi dériver un DL terme à terme **à condition de savoir que f' admet un DL**.

Théorème : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \rightarrow E$, $a \in I$ tel que f soit de classe \mathcal{C}^n sur I , alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ie

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

⚠ La réciproque est fautive : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geq 2$.

Remarque

L'hypothèse du programme officielle est f de classe \mathcal{C}^n , mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a .

Démonstration

On a déjà vu que c'est vrai pour $n = 1$.

Si c'est vrai à l'ordre $n - 1$, et si f admet une dérivée d'ordre $n \geq 1$ en a , alors f' admet une dérivée d'ordre $n - 1$ en a et par hypothèse de récurrence,

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}).$$

Alors, par primitivation de DL,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ce qui établit la récurrence.

Pour la réciproque, si $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0, on a $f(x) = o(x^2)$ qui est un DL₂ de f en 0 et pourtant

$f' : x \mapsto 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon n'est pas dérivable en 0. □

IV ARCS PARAMÉTRÉS

On pose $n = \dim E \geq 2$.

1 Définition

Définition : Arc paramétré, support

On appelle **arc paramétré** de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans E tout couple (I, f) où I est un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide et $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

L'ensemble $\Gamma = \{f(t), t \in I\}$ est appelé **support** de l'arc paramétré (I, f) (ou **courbe**).

On dit que (I, f) est un paramétrage de cette courbe.

Remarque

Représentation géométrique lorsque $E = \mathbb{R}^2$, $f : t \in I \mapsto (x(t), y(t))$.

Exemples

E1 – Pour $t \in [0, 2\pi]$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Le support de l'arc $([0, 2\pi], f)$ est le cercle unité.

E2 – Pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$. Le support de l'arc (\mathbb{R}, f) est la droite $D = (x_0, y_0) + \mathbb{R}(a, b)$.

E3 – Une courbe d'équation cartésienne $y = \varphi(x)$ où φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} est le support de l'arc

$$(I, f) \text{ où } f : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (t, \varphi(t)) \end{cases}$$

E4 – Si $a, R \in \mathbb{R}_+^*$, $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (R \cos t, R \sin t, at) \in \mathbb{R}^3$, le support de l'arc est une hélice inscrite sur le cylindre d'axe (Oz) et de base le cercle de centre O et de rayon R .

Remarques

R1 – Usuellement, on confond (abusivement) l'arc et son support.

R2 – Dans la pratique, on a souvent affaire à des courbes paramétrées qui sont des réunions d'arc paramétrés (lorsque l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles).

R3 – *Interprétation cinématique* :

On peut a priori voir $f(t)$, pour $t \in I$, de deux manières différentes :

- Comme les coordonnées $(x(t), y(t))$ d'un point mobile $M(t)$ du plan (point de vue *affine*) ;
- Comme les coordonnées $(x(t), y(t))$ d'un vecteur mobile $\overrightarrow{OM}(t)$ (point de vue *vectériel*).

Alors, lorsque ces quantités existent, $f'(t)$ représente la vitesse (plus exactement le vecteur vitesse), et $f''(t)$ représente l'accélération (plus exactement le vecteur accélération) du point mobile $M(t)$ à l'instant $t \in I$.

Le support de Γ de l'arc est alors la *trajectoire* du point mobile M .

On parle de *mouvement uniforme* lorsque la vitesse est constante en norme, de *mouvement rectiligne* lorsque la trajectoire est contenue dans une droite du plan.

2 Régularité

Définition

Soit (I, f) un arc paramétré. On dit que le point M de paramètre t est **régulier** lorsque $f'(t) \neq 0_E$. Dans le cas contraire, M est dit **singulier** ou **stationnaire**.

L'arc est dit **régulier** lorsque tous ses points le sont.

Exemples

E1 – Une courbe d'équation $y = \varphi(x)$ est régulière.

E2 – Un cercle est régulier.

3 Étude locale, tangente

Définition : demi-tangentes

Soit (I, f) un arc paramétré, $M_0 = f(t_0)$ un point de paramètre $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, et $M(t) = f(t)$ un point de paramètre t distinct de M_0 . On suppose qu'au voisinage (strict) de t_0 , $f(t) \neq f(t_0)$.

On appelle **demi-tangente à gauche** (resp. **demi-tangente à droite**) à l'arc en M_0 , lorsqu'elle existe, la demi-droite passant par M_0 ayant pour vecteur directeur la limite de $\frac{1}{\|M_0 M(t)\|} \overrightarrow{M_0 M(t)}$ lorsque t tend vers t_0 à gauche (resp. à droite).

On parle de **tangente** en M_0 lorsque les deux demi-droites sont contenues dans la même droite.

Propriété

Soit (I, f) un arc paramétré, $M_0 = f(t_0)$ un point de paramètre $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ régulier. Il y a une tangente en M_0 dirigée par $f'(t_0)$.

Démonstration

Soit $h = t - t_0 \neq 0$.

Comme $f(t) - f(t_0) = hf'(t_0) + o(h)$, $\|f(t) - f(t_0)\| = \|hf'(t_0) + o(h)\| = |h| \|f'(t_0) + o(1)\|$, donc $\frac{1}{\|f(t) - f(t_0)\|} (f(t) - f(t_0)) = \frac{1}{|h| \|f'(t_0) + o(1)\|} (hf'(t_0) + o(h))$ qui tend vers $\text{sgn}(h) \frac{1}{\|f'(t_0)\|} f'(t_0)$ lorsque h tend vers 0, i.e. t tend vers t_0 . \square

Remarques

R1 – Pour un arc paramétré plan, avec le produit scalaire canonique, la droite passant par $M_0 = M(t_0)$ et dont $f'(t_0)$ est un vecteur normal est appelée **normal** à l'arc paramétré (I, f) en M_0 .

On peut alors déterminer une équation de la tangente : $\begin{vmatrix} x - x_0 & x'_0 \\ y - y_0 & y'_0 \end{vmatrix} = y'_0(x - x_0) + x'_0(y - y_0)$ ce qui permet de retrouver l'équation de la tangente dans le cas d'une courbe d'équation $y = \varphi(x)$.

Équation de la normale : $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = 0$ soit $x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) = 0$.

R2 – Si le point est singulier (HP), f suffisamment régulière et p est le plus petit entier tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0_E$ (s'il existe), alors une démonstration similaire avec $f(t) - f(t_0) = h^p f^{(p)}(t_0) + o(h^p)$ permet de montrer qu'il y a une tangente, dirigée par $f^{(p)}(t_0)$.

On peut aussi chercher la limite du taux d'accroissement $\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}$ lorsque $t \rightarrow t_0$ qui donne la pente de la tangente (si elle existe).

4 Plan d'étude d'un arc paramétré plan



Méthode : Plan d'étude d'un arc paramétré plan

On étudie l'arc paramétré $t \mapsto f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

1. Domaine de définition de f donc de x et y . En général une réunion d'intervalles.

2. Réduction du domaine d'étude : effets géométrique de transformations $t \mapsto -t, t \mapsto \frac{1}{t}, t \mapsto t+T, t \mapsto T-t$, etc.
3. Étude de la classe \mathcal{C}^1 , variations conjointes de x et y .
4. Tangente en des points particuliers.
5. Tracé.

Remarque

L'étude des branches infinies et des courbes asymptotes est hors-programme.

Les droites asymptotes horizontales se trouvent facilement : $(x(t), y(t)) \rightarrow (\pm\infty, y_0)$ ou $(x(t), y(t)) \rightarrow (x_0, \pm\infty)$.

Pour les droites obliques, c'est comme pour les courbes $y = \varphi(x) : \frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow a$ puis $y(t) - ax(t) \rightarrow b...$

Exemples

E1 – Folium de Descartes : $x(t) = \frac{t}{1+t^3}$ et $y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$.

x, y sont de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

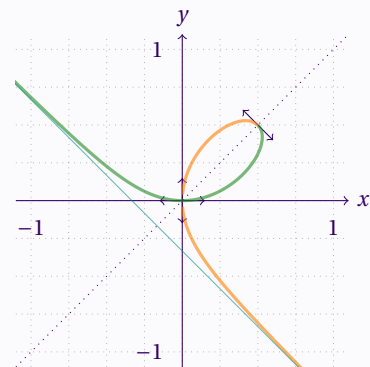
Si $t \neq 0$, on remarque que $x(\frac{1}{t}) = y(t)$. Il suffit d'étudier sur $] -1, 1[$ puis une symétrie d'axe $y = x$ donnera toute la courbe.

On calcule pour $t \in] -1, 1[$, $x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$ et $y'(t) = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$.

On a $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} -\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} +\infty$ puis $\frac{y(t)}{x(t)} = t \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} -1$ et enfin $y(t) + x(t) = \frac{t+t^2}{1+t^3} = \frac{t}{t^2-t+1} \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} -\frac{1}{3}$ donc la droite d'équation $y = x - \frac{1}{3}$ asymptote lorsque $t \rightarrow -1$.

On trace le tableau de variations et la courbe :

t	-1	0	$1/\sqrt[3]{2}$	1			
$x'(t)$		+	1	+	0	-	-1/4
$x(t)$	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{4}/3$	$1/2$			
$y(t)$	$+\infty$	0	$\sqrt[3]{2}/3$	$1/2$			
$y'(t)$		-	0	+	$\neq 0$	+	1/4
Infos	$y = x - 1/3$	\leftrightarrow	\uparrow	\searrow			



E2 – Courbe de Lissajous : $x(t) = \cos 3t$ et $y(t) = \sin 2t$. x, y sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

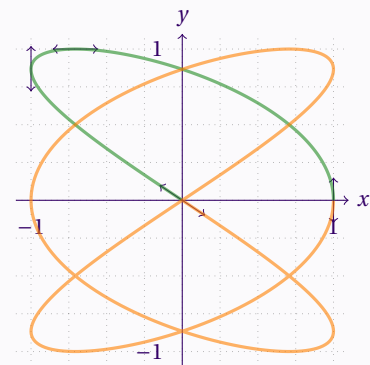
$x(t+\pi) = -x(t)$ et $y(t+\pi) = y(t)$ donc étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis symétrie d'axe (Oy) .

x paire et y impaire, donc étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis symétrie d'axe (Ox) .

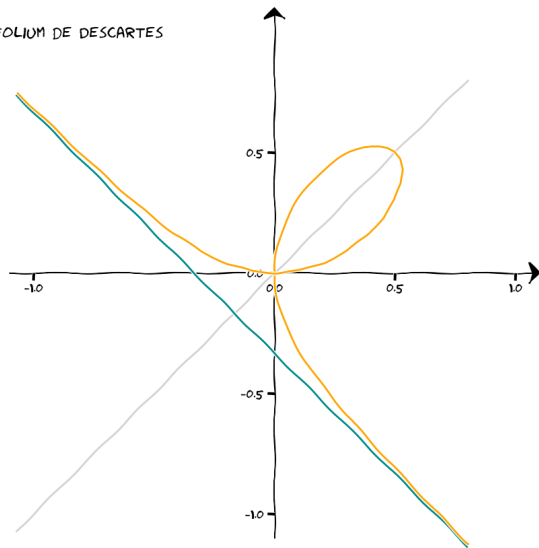
On calcule pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x'(t) = -3\sin 3t$ et $y'(t) = 2\cos 2t$.

On trace le tableau de variations et la courbe :

t	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$			
$x'(t)$	0	-	$\neq 0$	-	0	+	3
$x(t)$	1	$-\sqrt{2}/2$	-1	0			
$y(t)$	0	1	$\sqrt{3}/2$	0			
$y'(t)$	$\neq 0$	+	0	-	$\neq 0$	-	-2
Infos	\uparrow	\leftrightarrow	\uparrow	$(3, -2)$			



FOLIUM DE DESCARTES



COURBE DE LISSAJOUS

