Limite et continuité

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Étude locale d'une application, continuité	
Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.	
Continuité en un point.	
Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E.
Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$	Notation $\mathscr{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est hors programme.
i) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
~~Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.~~	~~Démonstration non exigible.~~
~~Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.~~	~~Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.~~
~~Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.~~	
~~Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.~~	
~~Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.~~	
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.	
Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemple : déterminant.

TABLE DES MATIÈRES

On se donne $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$, $(G,\|\cdot\|_G)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d_E, d_F, d_G les distances associées à la norme pour chaque espace.

On fixe A et B des parties non vides de E et F respectivement.

I Limite

1 Limite en un point

Soit $f\in F^A$, $a\in\overline{A}$, $b\in F$.

Définition

On dit que $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$ lorsque pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que

$$\forall x\in A,\quad d_E(x,a)=\|x-a\|_E\leqslant\eta\Longrightarrow d_F(f(x),b)=\left\|f(x)-b\right\|_F\leqslant\varepsilon.$$

Remarques

R 1 – Définitions équivalentes :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in A,\ x\in B_E(a,\eta)\Longrightarrow f(x)\in B_F(b,\varepsilon)$$
$$\forall V \text{ voisinage de } b,\ \exists W \text{ voisinage de } a,\ f(A\cap W)\subset V$$
$$\forall V \text{ voisinage de } b,\ \exists W' \text{ voisinage de } a \textbf{ dans } A,\ f(W')\subset V$$
$$\left\|f(x)-b\right\|\xrightarrow[x\to a]{}0_{\mathbb{R}}$$
$$f(a+h)\xrightarrow[h\to 0_E]{} b$$

R 2 – Cette définition dépend des normes. Mais en changeant une norme en une norme équivalente on ne change pas la définition.

Propriété

Si f admet b comme limite en a, alors f est bornée au voisinage de A.

Démonstration

Appliquer la définition avec $\varepsilon=1$. □

Propriété : Caractérisation séquentielle

$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout suite $(a_n)\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n\to a$, $f(a_n)\to b$.

Démonstration

Semblable au cas numérique.

- ($\Longrightarrow$) : Soit $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to a$.
  Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que si $x \in A$ tel que $\|x-a\|_E \leqslant \eta$, $\|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon$.
  On a aussi $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $\|a_n - a\|_E \leqslant \eta$. Alors si $n \geqslant N$, $|f(a_n)-b| \leqslant \varepsilon$.
  En résumé : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |f(a_n)-b| \leqslant \varepsilon$.
- ($\Longleftarrow$) : par contraposée,
  Si $f(x) \not\to b$, alors on a $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, on a $x \in A$ tel que $\|x-a\|_E \leqslant \eta$ et $\|f(x)-b\|_F > \varepsilon$.
  Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $\eta = \frac{1}{n+1}$, on a $a_n \in A$ tel que $|a_n - a| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $\|f(a_n)-b\|_F > \varepsilon$.
  Alors $a_n \to a$ et pourtant $f(a_n) \not\to b$. □

Propriété : Unicité de la limite

Si $f \xrightarrow[x\to a]{} b$ et $f \xrightarrow[x\to a]{} b'$, alors $b = b'$.

Démonstration

Comme $a \in \overline{A}$, on a une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$. alors $f(a_n) \to b$ et $f(a_n) \to b'$ donc par unicité de la limite des suites, $b = b'$. □

Propriété

Si $g \in \mathbb{R}^A$ telle que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et si, au voisinage de a, $\|f(x)-b\| \leqslant g(x)$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.

Démonstration

Si $a_n \to a$, à partir d'un certain rang N, $\|f(a_n)-b\| \leqslant g(a_n) \to 0$ donc $f(a_n) \to b$ donc par caractérisation séquentielle, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$. □

Propriété

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, $\|f(x)\|_F \xrightarrow[x\to a]{} \|b\|_F$.

2 Cas où F est de dimension finie

Propriété

Si F est de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F, $f \in F^A$, $b = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \in F$.

On note $f_k \in \mathbb{K}^A$ tel que pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$.

Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k \xrightarrow[x\to a]{} b_k$.

Démonstration

Toutes les normes sont équivalentes : utiliser $\|\cdot\|_1$. □

3 Fonction à valeurs dans un espace produit

Propriété

Si $(F_1,N_1),\dots,(F_p,N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on munit $F_1\times\cdots\times F_p$ de la norme produit N.
Si $f\in(F_1\times\cdots\times F_p)^A$, $a\in\overline{A}$. Pour $i\in[\![1,p]\!]$, on pose $f_i\in F_i^A$ tel que $f: x\mapsto(f_1(x),\dots,f_p(x))$.
Soit $b=(b_1,\dots,b_p)\in F_1\times\cdots\times F_p$.
Alors $f\xrightarrow[x\to a]{}b$ si et seulement si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $f_i(x)\xrightarrow[x\to a]{}b_i$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la caractérisation séquentielle et la propriété connue pour les suites. □

4 Opérations algébriques

La caractérisation séquentielle permet de prouver facilement les propriétés sur les opérations algébriques sur les limites.

Propriété

Soient $f,g\in F^A$, $h\in\mathbb{K}^A$ telles que $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\in F$, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}b'\in F$, $h(x)\xrightarrow[x\to a]{}\alpha\in\mathbb{K}$.

(i) Si $\lambda\in\mathbb{K}$, alors $f+\lambda g\xrightarrow[x\to a]{}b+\lambda b'$.

(ii) $h(x)\cdot f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\alpha\cdot b$.

(iii) Si $\alpha\neq 0$ et h ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{1}{h(x)}\xrightarrow[x\to a]{}\dfrac{1}{\alpha}$.

Propriété

Si $f\in F^A$, telle que $f(A)\subset B$, $g\in G^B$, $a\in\overline{A}$, $b\in\overline{B}$, $c\in G$ tels que $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b$, $g(y)\xrightarrow[y\to b]{}c$ alors $g\circ f(x)\xrightarrow[x\to a]{}c$.

Exemples

E1 – $f:(x,y)\mapsto\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$.
$f(x,0)\xrightarrow[x\to 0]{}0$: s'il y a une limite, c'est 0. $f(0,y)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ aussi mais cela ne suffit pas !
$|f(x),y)|\leqslant|x|+|y|\to 0$.
Autre méthode : changement de variable en polaire $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$.
$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\to 0$.

E2 – $f:(x,y)\mapsto\dfrac{x^2}{|x-y|}$ en $(0,0)$.
$f(0,y)\to 0$ et $f(x,x+x^2)\to 1$ donc pas de limite (par composition ou par caractérisation séquentielle).

5 Extension à l'infini

Définition

Si A non bornée, $f \in F^A$, $b \in F$.
On dit que $f(x) \xrightarrow[\|x\|_E \to +\infty]{} b$ lorsque

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x \in A,\ \ \|x\|_E \geqslant M \Longrightarrow \left\|f(x) - b\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Définition

Si $A \subset \mathbb{R}$, $f \in F^A$, $b \in F$.

(i) Si A n'est pas majorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$ lorsque

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x \in A,\ \ x \geqslant M \Longrightarrow \left\|f(x) - b\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

(ii) Si A n'est pas minorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} b$ lorsque $f(-x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$ c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x \in A,\ \ x \leqslant M \Longrightarrow \left\|f(x) - b\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Définition

Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et $a \in \overline{A}$.

(i) On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ lorsque

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall\, x \in A,\ \ \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

(ii) On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ lorsque $-f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ c'est-à-dire

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall\, x \in A,\ \ \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

Remarques

R 1 – Reste les définitions vues en première année de $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$ lorsque $E = F = \mathbb{R}$:

- Pour A majorée
  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \ \exists\, M' \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x \in A,\ \ x \geqslant M' \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ ssi $-f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, ie

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \ \exists\, M' \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x \in A,\ \ x \geqslant M' \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

- Pour A minorée
  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ ssi $f(-x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, ie

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \ \exists\, M' \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x \in A,\ \ x \leqslant M' \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

  - ⋆ Pour A minorée : $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ ssi $-f(-x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, , ie

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \ \exists\, M' \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x \in A,\ \ x \leqslant M' \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

R 2 – On définit de même $f(x) \xrightarrow[\|x\|_E \to +\infty]{} \pm\infty$.

R 3 – La caractérisation séquentielle de la limite est encore valable pour l'infini, avec une démonstration similaire.

R 4 – On peut unifier toutes ces définitions en introduisant une notion de voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}$: un voisinage de $+\infty$ est une partie V telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $]M, +\infty[\subset V$, un voisinage de $-\infty$ est une partie V telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, M[\subset V$.
Alors toutes les définitions de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ s'écrivent

$$\forall\, V \text{ voisinage de } b,\ \ \exists\, W \text{ voisinage de } a,\ \ f(A \cap W) \subset V$$

II Relations de comparaison

Définition

Soit $f,g \in F^A$ où A partie de E, $\varphi \in \mathbb{R}^A$, $a \in \overline{A}$. Si A est une partie non minorée ou non majorée de $\mathbb{R}$, a peut aussi être $\pm\infty$.

- f est **dominée** par φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(\varphi(x))$ lorsqu'il existe un réel M et un voisinage V de a tel que sur V on ait $\|f(x)\|_E \leqslant M|\varphi(x)|$.
  Cela revient à dire que $\|f\|_E = \mathrm{O}(|\varphi|)$.
  Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $x \mapsto \dfrac{1}{\varphi(x)} f(x)$ est bornée au voisinage de a.
- f est **négligeable** devant φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(x))$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que sur V on ait $\|f(x)\|_E \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|$.
  Cela revient à dire que $\|f\|_E = \mathrm{o}(|\varphi|)$.
  Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $\dfrac{1}{\varphi(x)} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $f-g$ est négligeable devant $\|f\|$ ou devant $\|g\|$ (cela revient au même) au voisinage de a.

III Continuité

1 En un point, sur une partie

Soient $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$.

Définition : Continuité

f est **continue en** a lorsque f admet une limite (finie) en a.
f est **continue sur** A si et seulement si f est continue en tout point de A.

Propriété

Si f est continue en a, la limite de f en a vaut $f(a)$.

Démonstration

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tel que $\|x-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x)-\ell\| \leqslant \varepsilon$: en particulier, pour $x = a$, $\forall \varepsilon > 0$, $\|f(a)-\ell\| \leqslant \varepsilon$. $\square$

Propriété : Caractérisation séquentielle

f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))$ converge.

Démonstration

- ($\Longrightarrow$) : Si f est continue en a, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ donc la conclusion découle de la caractérisation séquentielle de la limite.
- ($\Longleftarrow$) : Si pour toute suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))$ converge, soient deux telles suites (a_n) et (b_n), et ℓ et

ℓ' tel que $f(a_n) \to \ell$ et $f(b_n) \to \ell'$.
Alors en considérant la suite (c_n) telle que $c_n = a_n$ si n est pair et $c_n = b_n$ si n est impair, $c_n \to a$ car $c_{2n} \to a$ et $c_{2n+1} \to a$ en tant que suites extraites de (a_n) et de (b_n).
Donc on a ℓ'' tel que $f(c_n) \to \ell'$ et par extraction et unicité de la limite, $\ell = \ell'' = \ell'$.
Finalement, pour toute suite (a_n) telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))$ converge vers une même limite ℓ donc f converge en a d'après la caractérisation séquentielle, donc f est continue en a. □

Remarque

Forme plus faible : « f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $f(a_n) \to f(a)$ » conséquence immédiate de la caractérisation séquentielle de la limite.

Propriété : Opérations

- *Si f est continue, $x \mapsto \|f(x)\|$ l'est aussi.*
- *Toute combinaison linéaire, toute composée de fonctions continues est continue.*
- *Si $f : A \to F$ et $h : A \to \mathbb{K}$ sont continues, $h \cdot f$ l'est aussi. Si h ne s'annule pas, $\frac{1}{h} \cdot f$ l'est aussi.*

Démonstration

Conséquences immédiates des propriétés de la limite. □

Remarque

$\mathscr{C}(A,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{C}(A,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

E1 – $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 sinon, est discontinue en $(0,0)$ malgré la continuité des applications partielles, mais continue ailleurs.

E2 – $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y^2}{|x|+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 sinon, est discontinue en $(0,0)$ vu les applications partielles, mais continue ailleurs.

2 Continuité et topologie

Propriété

L'image réciproque d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé) relatif de l'ensemble de départ.

Remarque

Rappel : $f^{(-1)}\left({}^cB\right) = {}^c\left(f^{(-1)}(B)\right)$.

Démonstration

$f : A \to F$

- Si B fermé de F, soit $(a_n) \in f^{(-1)}(B)$ une suite convergeant vers $a \in A$. Alors $f(a_n) \in B \to f(a)$ par continuité donc

$f(a) \in B$ car B est fermé, donc $a \in f^{(-1)}(B)$.

- Il suffit de passer au complémentaire avec le rappel.
  Mais il n'est pas inintéressant de faire une preuve directe : si $\mathcal{O}$ ouvert de F, on veut montrer que $f^{(-1)}(\mathcal{O})$ est un ouvert de E.
  Soit $a \in f^{(-1)}(\mathcal{O})$. Alors $f(a) \in \mathcal{O}$ ouvert donc on a $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.
  Par continuité, on a $\eta > 0$ tel que $x \in A \cap B(a, \eta) \Longrightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.
  Donc $A \cap B(a, \eta) \subset f^{(-1)}(B(f(a), \varepsilon)) \subset f^{(-1)}(\mathcal{O})$ et $f^{(-1)}(\mathcal{O})$ est ouvert. □

Exemple

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Remarques

R 1 – Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue, $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in A,\ f(x) > a\}$ et $\{x \in A,\ f(x) < a\}$ sont des ouverts, $\{x \in A,\ f(x) \geqslant a\}$, $\{x \in A,\ f(x) \leqslant a\}$ et $\{x \in A,\ f(x) = a\}$ sont des fermés.

R 2 – Ce n'est plus vrai pour les images directes. Exemples : $\sin(]0, 4\pi[)$ et $\mathrm{Arctan}(\mathbb{R})$.

Exemple

Propriété

Des applications continues coïncidant sur des parties denses sont égales.

Démonstration

Conséquence des caractérisations séquentielles. □

3 Uniforme continuité

Définition

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{F}$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x, y \in A,\ \ \|x - y\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Remarque

À ne pas confondre avec f continue sur A :

$$\forall a \in A,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in A,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.
Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

Propriété

Une fonction uniformément continue sur A est continue sur A. Réciproque fausse.

Démonstration

Si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall a, x \in A,\ \|x-a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \left\|f(x)-f(a)\right\|_F \leqslant \varepsilon$$

alors

$$\forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \|x-a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \left\|f(x)-f(a)\right\|_F \leqslant \varepsilon. \quad \square$$

Propriété : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur A si et seulement si $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ f(x_n)-f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Remarque

N'apparaît pas dans le programme officiel, mais très utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue.

Démonstration

($\Rightarrow$) Si f uniformément continue et $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\varepsilon > 0$.

On a $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in I,\ \ \left\|x-y\right\| \leqslant \eta \Longrightarrow \left\|f(x)-f(y)\right\| \leqslant \varepsilon$ or on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \ x_n - y_n \leqslant \eta$, ainsi $\forall n \geqslant N,\ \ f(x_n)-f(y_n) \leqslant \varepsilon$ et donc $f(x_n)-f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

($\Leftarrow$) Par contraposée, si f n'est pas uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0,\ \exists x, y \in I,\ \ \left\|x-y\right\| \leqslant \eta$ et $\left\|f(x)-f(y)\right\| > \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\eta = \dfrac{1}{n+1}$, on a x_n, y_n des réels tels que $\left\|a_n - y_n\right\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\left\|f(x_n)-f(y_n)\right\| > \varepsilon$. Ainsi, $x_n - y_n \to 0$ et $f(x_n)-f(y_n) \not\to 0$. $\square$

Propriété

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

Remarque

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

Exemple

$x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ mais pas $x \mapsto x^2$.

Théorème : Théorème de Heine

On suppose que $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{K}$.
Tout fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Remarque

Sera généralisé plus tard.

Démonstration

Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue non uniformément continue, on a $\varepsilon_0 > 0$ et $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour tout n, $f(x_n) - f(y_n) > \varepsilon_0$. (voir preuve de la caractérisation séquentielle).

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée x une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$, puis de la suite bornée $\left(y_{\varphi(n)}\right)_n$ une suite convergente $\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$. Alors $\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$ est aussi convergente comme suite extraite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ et $x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)} \to 0$ donc les deux limites sont égales à ℓ.

Alors, par continuité, $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to f(\ell)$ et $f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to f(\ell)$ donc $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to 0$ ce qui contredit $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) > \varepsilon_0$.

Autre méthode avec une seule extractrice : on a φ telle que $x_{\varphi(n)} \to \ell$ puis $|y_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - \ell| \to 0$ donc $y_{\varphi(n)} \to \ell$ et on conclut de même. □

4 Fonctions lipschitziennes

Définition

$f : A \subset E \to F$ est dite k-lipschitzienne sur A (où $k \in \mathbb{R}_+^*$ si

$$\forall\, x, y \in A, \quad \left\|f(x) - f(y)\right\|_F \leqslant k \left\|x - y\right\|_E.$$

Propriété

Toute fonction lipschitzienne sur A y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Remarque

f lipschitzienne $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ f uniformément continue $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ f continue.
Contre-exemples : $\sqrt{\cdot}$ (voir td) et $x \mapsto x^2$.

Démonstration

$\forall\, x, y \in A, \quad \left\|f(x) - f(y)\right\|_F \leqslant k \left\|x - y\right\|_E$. Donc si $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ convient dans la définition de l'uniforme continuité. □

Exemple

$x \mapsto \|x\|$

Définition : distance à une partie

Si A est une partie non vide de E, $x \in E$, on appelle **distance de x à A** le réel $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$ qui est bien défini.

Démonstration

$\{\|x - a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car A non vide) minorée par 0. □

Propriété

$\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}\right.$ *est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.*

C'est en particulier le cas de $x \mapsto d(x,a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

Démonstration

$\square$

Exemple

On retrouve que les boules ouverte/fermée le sont.

5 Applications linéaires

Remarque

Pour une application linéaire, on peut toujours déplacer un problème en un point donné en un problème en 0_E, et la continuité revient à une lipschitziannité, et donc une uniformité continue.

Propriété : Continuité des applications linéaires

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est continue sur E.*

(ii) *u est continue en 0_E.*

(iii) $\boxed{\text{Il existe } C \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que pour tout } x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E.}$

(iv) *u est lipschitzienne sur E.*

(v) *u est uniformément continue sur E.*

Démonstration

$(i \Longrightarrow ii)$ Immédiat.

$(ii \Longrightarrow iii)$ Si u est continue en 0_E, en écrivant la définition avec $\varepsilon = 1$, on a $\eta > 0$ tel que si $\|x\|_E \leqslant \eta$, $\|u(x)\|_F \leqslant 1$ (car $u(0_E) = 0_E$).

Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\|\lambda x\|_E \leqslant \eta$: il suffit de choisir $\lambda = \dfrac{\eta}{\|x\|_E}$, par exemple.

Alors $\|u(\lambda x)\|_F = |\lambda|\,\|u(x)\|_F \leqslant 1$ donc $\|u(x)\|_F \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} = \dfrac{1}{\eta}\|x\|_E$.

Comme cette inégalité est également vérifiée en 0_E, $C = \dfrac{1}{\eta}$ convient.

$(iii \Longrightarrow iv)$ S'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$, alors pour tout $x, x' \in E$, $\left\|u(x) - u(x')\right\|_F = \left\|u(x-x')\right\|_F \leqslant C\left\|x - x'\right\|_E$ donc u est C-lipschitzienne.

$(iv \Longrightarrow v)$ Connu.

$(v \Longrightarrow i)$ Connu.

Définition

On note $\mathscr{L}_c(E,F) = \mathscr{L}(E,F) \cap \mathscr{C}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E.

Remarque

$\mathscr{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.

Exemples

E 1 – $\varphi : f \in (\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est continue. En effet, c'est une forme linéaire telle que pour tout f, $\varphi(f) \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.
Elle est aussi continue si on munit $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ de la convergence en moyenne.

E 2 – $f \in (\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_1) \mapsto f(0) \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est non continue avec f_n telle que $f_n(0) = 1$ mais $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n}$ (par exemple un triangle : $f_n(0) = 1$, $f_n(x) = 0$ si $x \geqslant \frac{2}{n}$ et f_n affine entre 0 et $\frac{2}{n}$; ou alors $f_n : x \mapsto x^n$).

Méthode : Étudier la continuité d'une application linéaire en dimension infinie

- Pour montrer qu'une application linéaire est continue, on cherche une constante C telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$.
- Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on cherche à nier la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 en trouvant une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0_E$ (ie $\|x_n\|_E \to 0$) et pourtant $u(x_n) \not\to 0_F$ (ie $\|u(x_n)\|_F \not\to 0_F$.)

Remarques

R 1 – La continuité dépend des normes au départ et à l'arrivée, mais ne change pas en prenant des normes équivalentes.

R 2 – La domination de norme est équivalente à la continuité de l'endomorphisme id_E pour ces normes : $\mathrm{id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est continue ssi on a C tel que $\forall x \in E, \quad N_2(\mathrm{id}_E(x)) = N_2(x) \leqslant CN_1(x)$ si et seulement si N_1 domine N_2.

IV DIMENSION FINIE

1 Coordonnées

Propriété

On suppose F de dimension finie $n > 1$.

Soit A une partie non vide de E, $f \in F^A$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F. On pose $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, f_k est continue sur A.

Démonstration

Propriété analogue connue pour les limites. $\square$

2 Applications linéaires

Théorème

Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E vers F est continue sur E.
Autrement dit, $\mathscr{L}_c(E,F) = \mathscr{L}(E,F)$.

Remarque

La réciproque est vraie car une domination de norme est une continuité d'application linéaire (id_E).

Démonstration

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $x \in E$.

On décompose $x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$. Alors $\|u(x)\|_F = \left\| \sum_{k=1}^{p} x_k u(e_k) \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k| \, \|u(e_k)\|_F \leqslant C N_1(x)$ où $C = \max \|u(e_k)\|$ ne dépend pas de x et N_1 norme sur E de dimension finie donc équivalente à $\|\cdot\|_E$: on a $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $N_1 \leqslant \alpha \|\|_E$ et alors $\|u(x)\|_F \leqslant \alpha C \|x\|_E$ donc u est bien continue. □

Exemple

Si $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PAP^{-1}$ est continue car linéaire en dimension finie.
Ainsi, si $A_k \to A$, alors $PA_kP^{-1} \to PAP^{-1}$.

3 Applications polynomiales

Définition

Soit $f : E \to K$, où E est de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.
f est dite **monomiale** s'il existe $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}^p$ tels que $f : x \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$.
f est dite **polynomiale** si elle est combinaison linéaire de fonctions monomiales.

Remarque

En changeant des base, les anciennes coordonnées sont transformées en combinaisons linéaires de nouvelles coordonnées. Ainsi, le caractère polynomial d'une fonction ne dépend pas de la base.

Propriété

Toute fonction polynomiale sur E de dimension finie est continue.

Démonstration

Les formes i^{e} coordonnées $\varphi_i : x \mapsto x_i$ sont linéaires donc continues, donc, par opérations, f l'est. □

Exemple

det est donc continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car polynomial en les cœfficients de la matrice.
On en déduit par exemple que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert en tant que image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ par l'application continue det.

4 Applications multilinéaires

Propriété : Continuité des applications bilinéaires en dimension finie

Si $(E, \|\|_E)$, $(F, \|\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $(G, \|\cdot\|_G)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Démonstration

$B : E \times F \to G$ bilinéaire, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_q)$ une base de F.

Si $(x, y) \in E \times F$, $B(x, y) = B\left(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k, \sum_{\ell=1}^{q} y_\ell f_\ell\right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} x_k y_\ell B(e_k, f_\ell)$.

Or $(x, y) \mapsto x_k$ est continue car $x \mapsto x_k$ l'est et $(x, y) \mapsto y_\ell$ est continue car $y \mapsto y_\ell$ donc par opérations B est continue. □

Propriété : Généralisation

Plus généralement, toute application multilinéaire définie sur un produit d'espaces de dimension finie est continue.

Démonstration

Démonstration similaire. □

Exemple

Si $\mathscr{B}$ base de E de dimension finie, $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire de E donc est continue.