Topologie

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie.	Une boule ouverte est un ouvert.
Voisinage d'un point.	
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
Point intérieur, point adhérent.	
Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.	
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Caractérisation séquentielle des fermés de A.

TABLE DES MATIÈRES

On se donne $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d la distance associée.

I OUVERTS, FERMÉS, VOISINAGES

1 Voisinage

Définition : Voisinage

Soient $a \in E$ et V une partie de E.
On dit que V est un **voisinage** de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en a contenue dans V.

Remarque

Cela revient à dire qu'on a une distance de sécurité autour de a qui permet de s'en approcher dans toutes les directions en restant dans V.
En particulier, $a \in V$.

Propriété

(i) Si V voisinage de a et $V \subset W$, alors W est un voisinage de a.
(ii) Une réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.
*(iii) Une intersection **finie** de voisinages de a est un voisinage de a.*

Démonstration

(i) Facile.
(ii) Si $(V_i)_{i\in I}$ est une famille de voisinages de a, pour n'importe quel $j \in I$, $V_j \subset \bigcup\limits_{i\in I} V_i$ donc, d'après la propriété (i), $\bigcup_{i\in I} V_i$ est un voisinage de a.
(iii) Si $V_1, \dots, V_n$ sont des voisinages de a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(a,\varepsilon_i) \subset V_i$. Soit $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_i$. Alors $B(a,\varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i\in I} V_i$ qui est un voisinage de a. □

Remarque

⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies.
Par exemple, dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$ sont des voisinages de 0, mais $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}^*} V_i = \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0.

Propriété

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les voisinages pour N_1 sont des voisinages pour N_2.
Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

Démonstration

On a $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.
Si V est un voisinage de a pour N_1, on a un $\varepsilon > 0$ tel que $N_1(x-a) < \varepsilon \Longrightarrow x \in V$.
Alors $N_2(x-a) < \frac{\varepsilon}{\alpha} \Longrightarrow x \in V$.
Donc V est un voisinage de a pour N_2. □

2 Parties ouvertes

Définition : Ouvert

Une partie $\mathcal{O}$ de E est dite **ouverte** ou **un ouvert** de E lorsque $\mathcal{O}$ est voisinage de tout ses points, autrement dit $\forall a \in \mathcal{O},\ \exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \subset \mathcal{O}$.
Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

Remarque

Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de point « au bord ».

Exemples

E 1 – Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des ouverts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

E 2 – Le quart de plan $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est-il un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$?

E 3 – Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, alors $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriété

Toute boule ouverte est ouverte (!)

Démonstration

Si $x \in E$, $r > 0$, $\mathcal{O} = B(x,r)$.
Soit $a \in \mathcal{O}$. Alors $B(a, r - d(x,a)) \subset \mathcal{O}$. En effet, si $d(a,b) < r - d(a,x)$, alors $d(x,b) < d(x,a) + d(a,b) < r$. □

Propriété

(i) $\varnothing$, E sont ouverts.

(ii) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.

*(iii) Une intersection **finie** d'ouverts est ouverte.*

Remarque

⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies, avec le même contre-exemple que pour les voisinages.
Dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$ sont ouverts, mais $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} V_i = \{0\}$ ne l'est pas.

Démonstration

(i) Facile.

(ii) Si les $\mathcal{O}_i$ pour $i \in I$ sont ouverts, et si $a \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, alors il existe $j \in i$ tel que $a \in \mathcal{O}_j$ qui est ouvert, $\mathcal{O}_j$ est un voisinage de a et donc $\mathcal{O}_j \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ voisinage de a.

(iii) Si $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$, alors pour tout i, $a \in \mathcal{O}_i$ donc les $\mathcal{O}_i$ sont tous voisinages de a, donc leur intersection (finie) l'est encore.

□

Propriété

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les ouverts pour N_1 sont des ouverts pour N_2.
Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

Démonstration

Les voisinages pour N_1 sont des voisinages pour N_2. □

Remarques

R 1 – On appelle topologie de $(E, \|\cdot\|)$ l'ensemble de ses ouverts.
Si N_1 est dominée par N_2, la topologie pour N_2 possède plus d'ouverts que celle pour N_1. On dit que la topologie

pour N_2 est plus fine que celle pour N_1.

R 2 – En particulier, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Les notions de voisinages et donc d'ouverts ne dépendant pas du choix de la norme.

3 Parties fermées

Définition : Fermé

Une partie F de E est dite fermée lorsque son complémentaire ${}^cF$ est ouvert.

Remarques

R 1 – Intuitivement : bord compris.

R 2 – ⚠ Fermé n'est pas le contraire d'ouvert. On peut être les deux à la fois. Le plus souvent, on n'est ni l'un ni l'autre...

Propriété

Toute boule fermée est fermée (!)

Démonstration

Soit $F = \overline{B}(a,r)$. ${}^cF = \{x \in E,\ d(x,a) > r\}$.
Soit $b \in {}^cF$. On montre que $\overline{B}(b, d(b,a) - r) \subset {}^cF$.
En effet, si $x \in \overline{B}(b, d(b,a) - r)$, $d(a,x) \geqslant d(a,b) - d(x,b) \geqslant d(a,b) - (d(a,b) - r) = r$ donc $x \in {}^cF$. □

Remarque

Les singletons sont des fermés.

Propriété

(i) $\varnothing$, E sont fermés.
(ii) Une intersection quelconque de fermés est fermée.
*(iii) Une réunion **finie** de fermés est fermée.*

Remarques

R 1 – C'était l'inverse pour les ouverts.

R 2 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des réunions infinies.
Dans $\mathbb{R}$, les $F_i = \left[-1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right]$ sont fermés, mais $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} F_i =]-1, 1[$ ne l'est pas.

R 3 – Une partie finie est fermée.

Démonstration

Il suffit de passer au complémentaire et d'utiliser les propriétés des ouverts. □

Exemples

E 1 – Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des fermés de $(\mathbb{R},|\cdot|)$?

E 2 – Si $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$, alors $]-\infty,b]$, $[a,+\infty[$, $[a,b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Propriété

Toute sphère de E est fermée.

Démonstration

$S(a,r)=\overline{B}(a,r)\cap {}^c B(a,r)$ est une intersection de fermés. □

Propriété : Caractérisation séquentielle

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

Démonstration

($\Longrightarrow$) Si F est fermée, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F, $\ell\in E$ sa limite, on suppose, par l'absurde que $\ell\in {}^cF$, qui est ouvert.
On a donc $\varepsilon>0$ tel que $B(\ell,\varepsilon)\subset {}^cF$.
Or on a un rang à partir duquel $x_n\in B(\ell,\varepsilon)$ ce qui est contradictoire.

($\Longleftarrow$) Par contraposée, si F n'est pas fermée, ${}^cF$ n'est pas ouverte, donc on a $\ell\in {}^cF$ tel que pour tout $\varepsilon>0$, $B(\ell,\varepsilon)\not\subset {}^cF$ ie $B(\ell,\varepsilon)\cap F\neq\varnothing$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Avec $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$, on a $x_n\in B\left(\ell,\frac{1}{n+1}\right)\cap F$ donc tel que $d(x_n,\ell)\leqslant\frac{1}{n+1}$.
Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}$ et $x_n\to\ell\notin F$. □

Exemple

$F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2\leqslant y\leqslant x\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

II ADHÉRENCE, DENSITÉ, INTÉRIEUR

1 Points adhérents, adhérence

Remarque

Intuitivement, un point adhérent est un point dans A ou « au bord » de A.

Définition : Point adhérent

Soit A une partie de E et $x\in E$. On dit que x est adhérent à A lorsque $\forall\varepsilon>0,\ \ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$.

Propriété : Caractérisation séquentielle

x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration

($\Longrightarrow$) On suppose que x est adhérent à A.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on a $a_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$ donc tel que $d(a_n, x) \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Cela définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$.

($\Longleftarrow$) Si on a une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a un rang à partir duquel $a_n \in B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. □

Définition : Adhérence

L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Remarques

R 1 – Ne pas confondre avec le complémentaire.

R 2 – Intuitivement, « les points de A et les points des bords ».

Exemple

E	A	$\overline{A}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$]0, 1]$	$[0, 1]$
E	$B(a, r)$	$\overline{B}(a, r)$

Pour la dernière, si $x \in \overline{B(a,r)}$, on a une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $B(a,r)$ telle que $x_n \to a$. Donc pour tout n, $d(x_n, a) < r$ et alors $d(x, a) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, a) < d(x, x_n) + r$. En passant à la limite, $d(x, a) \leqslant r$, donc $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$.

Réciproquement, si $x \in \overline{B}(a,r)$, soit $x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a) \to x$ et $x_n \in B(a,r)$ donc, par caractérisation séquentielle, $x \in \overline{B(a,r)}$.

Finalement, $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

Propriété

Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Démonstration

Caractérisation séquentielle. □

Propriété : Caractérisation

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration

$\overline{A}$ est un fermé de E contenant A : Par définition, on a bien $A \subset \overline{A}$. Puis on montre que ${}^c\overline{A}$ est ouvert.
Si $x \notin \overline{A}$, on a $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$. Si $y \in B(x,\varepsilon)$, $B(y, \varepsilon - d(x,y)) \cap A = \varnothing$ donc $y \notin \overline{A}$.

Il est plus petit que les autres : Si F est un fermé contenant A, et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A \subset F$ convergente, alors sa limite est dans F donc $\overline{A} \subset F$. □

Propriété

F est un fermé de E si et seulement si $\overline{F} = F$.

Démonstration

Si $F = \overline{F}$, F est fermé d'après ce qui précède.
Si F est fermé, on a déjà $F \subset \overline{F}$.
Puis, si $x \in \overline{F}$, x est limite d'une suite d'éléments de F donc $x \in \overline{F}$.

Propriété

Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ l'est aussi.

Démonstration

Conséquence de la caractérisation séquentielle. □

2 Densité

Définition : Densité

D est **dense** dans E lorsque $\overline{D} = E$, c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre D.

Propriété : Caractérisation séquentielle

D est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'élément de D.

Exemple

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

3 Intérieur

Définition

Soit A une partie de E, x$\in E$.

x est un **point intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans A.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A, noté $\mathring{A}$.

Propriété

Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Propriété : Caractérisation

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Démonstration

$\mathring{A}$ est un ouvert de E contenu dans A : Par définition, on a bien $\mathring{A} \subset A$. Puis, si $x \in \mathring{A}$, on a $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$. Mais si $y \in B(x,\varepsilon)$ qui est ouverte, alors $B(x,\varepsilon)$ est un voisinage de y donc A est un voisinage de y, donc $B(x,\varepsilon) \subset \mathring{A}$.

Il est plus grand que les autres : Si $\mathcal{O}$ est un ouvert contenu dans A, alors $\mathcal{O}$ est voisinage de tous ses points donc $\mathcal{O} \subset \mathring{A}$. □

Propriété

$\mathcal{O}$ est ouvert si et seulement si $\mathring{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$.

Démonstration

Si $\mathring{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$, alors $\mathcal{O}$ est ouvert d'après ce qui précède.
Puis, d'après la caractérisation, $\mathring{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ et si $\mathcal{O}$ est ouvert, $\mathcal{O} \subset \mathring{\mathcal{O}}$. □

Exemples

E 1 – $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$: $\mathbb{Q}$ ne contient pas d'intervalles ouverts non vides.

E 2 – $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}} = B(a,r)$: $B(a,r)$ est un ouvert contenu dans $\overline{B}(a,r)$, donc $B(a,r) \subset \overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}}$, et $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}} \subset \overline{B}(a,r)$, mais si $x \in S(a,r)$, $\overline{B}(a,r)$ n'est pas un voisinage de x, donc $x \notin \overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}}$ donc $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(a,r)}} \subset B(a,r)$

4 Frontière

Définition : Frontière

On appelle **frontière** de A l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemples

E 1 – $\mathrm{Fr}(B(a,r)) = S(a,r)$.

E 2 – $\mathrm{Fr}([0,1[) = \{0,1\}$.

E 3 – $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Remarque

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap {}^{c}\mathring{A}$ est fermé.

III Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie A non vide de E.

1 Voisinage relatif

Définition : Voisinage relatif

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage relatif de a dans** A toute partie V' de A s'écrivant $V' = A \cap V$ où V est un voisinage de a.

Remarques

R1 – Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \cap A \subset V'$.

R2 – V' n'est pas nécessairement un voisinage de a dans E.
Par exemple $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un voisinage de 0 dans $[0,1[$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

2 Ouverts relatifs

Définition : Ouvert relatif

Une partie $\mathcal{O}'$ de A est un **ouvert relatif de** A (ou **pour la topologie induite sur** A) lorsqu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$.

Remarques

R1 – $\mathcal{O}'$ est un voisinage **relatif** de chacun de ses points dans A.

R2 – $\mathcal{O}'$ ouvert relatif de A si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{O}'$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \cap A \subset \mathcal{O}'$.

Exemple

$\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un ouvert de $[0,1]$.

Remarque

Si A est ouvert, les ouverts relatifs de A sont les ouverts.

3 Fermés relatifs

Définition : Fermé relatif

Une partie F' de A est un fermé **relatif de** A s'il existe une fermé F tel que $F' = F \cap A$.

Remarques

R 1 – Le complémentaire **dans** A de F' est un ouvert relatif **de** A.

R 2 – Si A est fermé, les fermés relatifs de A sont les fermés.

Propriété : Caractérisation séquentielle

Soit F' une partie de A.

*F' fermé relatif de A si et seulement si F' est une partie de A telle que toute suite d'éléments de F' convergeant **dans** A a sa limite dans F'.*

Démonstration

Si F' est un fermé relatif de A, alors $F' = F \cap A$ où F est fermé. Si $(x_n) \in F'^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to \ell \in A$, alors comme F est fermé, $\ell \in F$ donc $\ell \in F'$.

Si toute suite d'éléments de F' convergeant dans A a sa limite dans F', soit $F = \overline{F'}$, fermé de E. Montrons que $F' = F \cap A$.

On a déjà $F' \subset F \cap A$. Puis, si $x \in F \cap A = \overline{F'} \cap A$, on a une suite d'éléments de F' convergeant vers $x \in A$ donc $x \in F'$. $\square$

4 Densité

Définition : Densité dans une partie

Soit B partie de A. B est **dense dans** A si et seulement si $A \subset \overline{B}$ si et seulement si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.