

# Séries numériques et vectorielles

Extrait du programme officiel :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

## a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général $u_n$ est notée $\sum u_n$ .
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série.	La suite $(u_n)$ et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
Série absolument convergente.	Cas des séries matricielles.
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.

## b) Compléments sur les séries numériques

Règle de d'Alembert.	Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.
Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.	L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.
Comparaison série-intégrale : Si $f$ est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ , alors la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ converge.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où $f$ est monotone. Interprétation géométrique.
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La suite de référence est positive à partir d'un certain rang. Cas des séries convergentes, des séries divergentes.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I Généralités sur les séries vectorielles</b>	<b>2</b>
1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme . . . . .	2
2 Correspondance suite et séries . . . . .	3
3 Espace vectoriel des séries convergentes . . . . .	4
4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière . . . . .	5
5 Reste d'une série convergente . . . . .	5
6 Séries alternées . . . . .	6
<b>II Séries à termes réels positifs</b>	<b>6</b>
1 Critères de convergence . . . . .	6
2 Comparaisons de termes généraux réels positifs . . . . .	7
3 Comparaison série-intégrale . . . . .	8
a Comparaison et caractérisation de convergence . . . . .	8
b Séries de Riemann . . . . .	9
c Évaluation des sommes partielles et des restes . . . . .	10
4 Formule de Stirling . . . . .	11
5 Critère de d'Alembert . . . . .	12
<b>III Convergence absolue</b>	<b>13</b>



<b>IV Sommation des relations comparaison</b>	<b>14</b>
1 Cas de divergence . . . . .	14
2 Cas de convergence . . . . .	15
<b>V Des séries classiques</b>	<b>15</b>
1 Séries de Bertrand . . . . .	15
2 Série exponentielle . . . . .	16
3 Série géométrique . . . . .	16
<b>VI Produit de Cauchy</b>	<b>17</b>

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $(E, \|\cdot\|)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé non nul de dimension finie. On pose  $p = \dim E$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ .

# I GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES VECTORIELLES

## 1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

### Définition

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  une suite.

Étudier la **série de terme général**  $u_n$ , notée  $\sum u_n$ , c'est étudier la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \in E.$$

$S_n$  est appelée **somme partielle d'ordre  $n$**  de la série  $\sum u_n$ .

$\sum u_n$  est dite **convergente** lorsque  $(S_n)_n$  converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série**  $\sum u_n$  le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

### Remarques

**R1** – Enlever un nombre fini de termes à  $S_n$  ne change pas sa convergence. Autrement dit, si  $I$  est fini,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus I} u_n$  sont de même nature.

En effet, si  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $\Sigma_n = \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus I} u_k$  et si  $n > \max I$ ,  $S_n = \Sigma_n + \sum_{n \in I} u_n$ . Lorsqu'elles sont convergentes, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus I} u_n + \sum_{n \in I} u_n.$$

**R2** – Une série peut n'être définie que pour  $n \geq n_0$ , et on note  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  la série dans ce cas.

**R3** – Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc. Cependant, en général, c'est en étudiant son terme général  $u_n$  qu'on déduit des propriétés de la série.

**R4** – Ne pas confondre la série  $\sum u_n$  (qui n'est pas une somme!) et le **nombre** (lorsqu'il existe)  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{K}$  (qui n'est pas une somme!).

**R5** –  $\triangleleft \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  n'est pas une somme, c'est une limite.

### Propriété : Séries géométriques

Si  $q \in \mathbb{K}$ , la série dite géométrique  $\sum q^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$ . Lorsque c'est le cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

**Exemple : Série harmonique alternée**

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  est convergente de somme  $\ln 2$ .

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \int_0^1 t^p dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

puis

$$|S_n - \ln 2| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Autre preuve possible : appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction  $t \mapsto \ln(1+t)$  sur  $[0, 1]$ .

## 2 Correspondance suite et séries

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général  $u_n$ , c'est étudier la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des sommes partielles. On a alors (avec  $S_{-1} = 0$ )

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = S_n - S_{n-1}$$

**Remarque**

Inversement, une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peut-elle être vue comme suite de sommes partielles d'une série de terme général  $u_n$  ?

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_0 + u_1 \\ v_2 = u_0 + u_1 + u_2 \\ \vdots \\ v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_0 = v_0 \\ u_1 = v_1 - v_0 \\ u_2 = v_2 - v_1 \\ \vdots \\ u_n = v_n - v_{n-1} \end{array} \right.$$

**Propriété**

Étudier la suite  $(v_n)_n$ , c'est étudier la série  $\sum (v_n - v_{n-1})$  (en posant  $v_{-1} = 0$ ) appelée *série télescopique*.

**Démonstration**

$$S_n = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{-1} = v_n. \quad \square$$

**Corollaire**

Soit  $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . La suite  $(v_n)$  et la série  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0.$$

**Démonstration**

$$S_n = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0. \quad \square$$



### Exemples

E1 – Nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  et calcul de la somme.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La série est télescopique,  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$  donc la série est convergente, de somme 1.

E2 – Nature de  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

La série est télescopique,  $S_n = \ln(n+1) - 0 \rightarrow +\infty$  donc la série diverge.

### Remarque

Dans la pratique, il est très rare qu'on prouve la convergence en calculant les sommes partielles et qu'on puisse calculer explicitement la somme de la série. Les séries géométriques et télescopiques en sont de rares exemples.

## 3 Espace vectoriel des séries convergentes

### Propriété

Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, et si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $\sum (u_n + \lambda v_n)$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

### Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k, \Sigma_n = \sum_{k=0}^n v_k \text{ alors } \sum_{k=0}^n (u_k + \lambda v_k) = S_n + \lambda \Sigma_n. \quad \square$$

### Remarques

- R1 – Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge, alors  $\sum (u_n + v_n)$  diverge.
- R2 – Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, alors on ne peut rien dire de  $\sum (u_n + v_n)$ .
- R3 – Si  $\sum v_n$  diverge et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\sum (\lambda v_n)$  diverge si et seulement si  $\lambda \neq 0$ .

### Propriété

Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$ . On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^p u_n^{(k)} e_k$ .

La série  $\sum u_n$  converge si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la série  $\sum u_n^{(k)}$  converge. Lorsque c'est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} \right) e_k.$$

**Remarque**

Lorsqu'il y a convergence, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ .

**Corollaire**

Si  $\sum u_n$  est une série à termes complexe, elle converge si et seulement si les séries  $\sum \Re u_n$  et  $\sum \Im u_n$  convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im u_n$$

**Remarque**

Lorsqu'il y a convergence,  $\Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n)$  et  $\Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n)$ .

## 4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

**Propriété : Divergence grossière**

Si  $u_n \not\rightarrow 0_E$ , alors  $\sum u_n$  diverge. On parle de **divergence grossière**.

⚠ La réciproque est fautive !

Si  $u_n \rightarrow 0_E$ , ON NE PEUT RIEN DIRE sur la convergence de  $\sum u_n$ .

**Démonstration**

$u_n = S_n - S_{n-1}$ , donc si  $(S_n)$  converge,  $u_n \rightarrow 0$ .

Contre-exemple : si  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  : **série harmonique**.

$u_n \rightarrow 0$  mais  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$  donc  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.  
On verra plus tard que  $H_n \sim \ln n$ . □

## 5 Reste d'une série convergente

**Définition**

Soit  $\sum u_n$  une série **convergente** et  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

On appelle **reste d'ordre  $n$  de la série**  $\sum u_n$  le nombre  $R_n = S - S_n$  qui n'a un sens que si la série converge.

**Propriété**

Avec les mêmes hypothèses,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N u_k$ .

**Démonstration**

$$S_N - S_n \rightarrow S - S_n = R_n \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty \text{ et } \sum_{k=n+1}^N u_k \rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty \quad \square$$

**Exemple : Série géométrique**

$$\text{Si } |q| < 1, R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

**Propriété**

Soit  $\sum u_n$  une série **convergente** et  $R_n$  son reste d'ordre  $n$ , alors  $R_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Démonstration**

$$R_n = S - S_n. \quad \square$$

## 6 Séries alternées

**Théorème : Critère Spécial sur des Séries Alternées**

Si  $u = (u_n)_n$  est une suite **réelle** telle que

**H1**  $u$  décroissante

**H2**  $u_n \rightarrow 0$

alors  $\sum (-1)^n u_n$  est convergente.

De plus, si on note  $v_n = (-1)^n u_n$ ,

- La somme  $S$  a le même signe que  $v_0 = u - 0$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le reste d'ordre  $n$ ,  $R_n$ , a le même signe que  $v_{n+1}$  et vérifie  $|R_n| \leq |v_{n+1}| = u_{n+1}$ .

**Exemple**

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}.$$

# II SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général, est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier  $\sum(-u_n)$  si le signe est négatif.

## 1 Critères de convergence

**Propriété**

Soit  $(u_n)$  suite **réelle positive**,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Alors

- (i)  $(S_n)$  est croissante
- (ii)  $(S_n)$  à une limite finie ou  $+\infty$ .
- (iii)  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $(S_n)$  est majorée.

**Démonstration**

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0. \quad \square$$

## 2 Comparaisons de termes généraux réels positifs

**Théorème : Comparaison des séries à termes réels positifs : cas de convergence**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à termes réels positifs.

Si  $\sum v_n$  converge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\bullet u_n = O(v_n), \quad \bullet u_n = o(v_n), \quad \bullet \text{apcr } u_n \leq v_n, \quad \bullet u_n \sim v_n$$

alors  $\sum u_n$  converge.

**Démonstration**

Dans le premier cas, on a  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall n \geq n_0, u_n \leq Mv_n$ .

Si  $S_n$  et  $\Sigma_n$  désignent respectivement les sommes partielles de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ , alors, tout étant positif,  $S_n \leq S_{n_0} + M(\Sigma_n - \Sigma_{n_0})$  à partir du rang  $n_0$ . Comme  $\sum v_n$  converge,  $(\Sigma_n)$  est majorée donc  $(S_n)$  majorée donc  $\sum u_n$  converge.

Les trois autres cas sont des cas particuliers du premier. □

**Corollaire : Comparaison des séries à termes positifs : cas de divergence**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à termes positifs.

Si  $\sum u_n$  diverge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\bullet u_n = O(v_n), \quad \bullet u_n = o(v_n), \quad \bullet \text{apcr } u_n \leq v_n, \quad \bullet u_n \sim v_n$$

alors  $\sum v_n$  diverge.

**Démonstration**

Contraposée du théorème. □

**Exemples**

E1 -  $\sum \frac{1}{n2^n}$  converge car à termes positifs et pour tout  $n \geq 1, \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$  terme général d'une série (géométrique) convergente.

E2 -  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge car à termes positifs et pour tout  $n \geq 1, \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  terme général d'une série (télescopique) convergente. (On peut montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .)

E3 -  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge car à terme positif et si  $n \geq 1, 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .



### Propriété

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à termes réels positifs telles que  $u_n \sim v_n$ . Alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

### Démonstration

Symétrie de l'équivalence. □

### Remarques

R1 – Attention, pour les autres relations de comparaisons, ce n'est pas une équivalence ! Si  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum u_n$  converge, on ne peut rien dire de  $\sum v_n$  en général.

#### Exemple

$\frac{1}{n^2} = O(1)$ ,  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge mais  $\sum 1$  diverge.

R2 – Plus généralement, pour des séries réelles, il suffit que l'une des deux soit de signe constant à partir d'un certain rang, l'autre aura alors le même signe par équivalence et le résultat reste vrai.

### Exemples

E1 –  $\sum \frac{1}{n}$  diverge car à termes positifs  $\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$  terme général d'une série (télescopique) divergente.

E2 –  $\sum \sin \frac{1}{n^2}$  converge car  $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$  donc à termes positifs à partir d'un certain rang et  $\sum \frac{1}{n^2}$  convergente.  $\sum \sin \frac{1}{n^3}$  converge et  $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge.

## 3 Comparaison série-intégrale

### a Comparaison et caractérisation de convergence

#### Propriété : Comparaison série-intégrale d'une fonction décroissante

Si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  décroît et est continue par morceaux alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

et

$$\int_p^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=p}^n f(k) \leq \int_{p-1}^n f(t) dt$$

si  $f$  est continue par morceaux sur  $[p-1, n]$ .

**Remarques**

- R1 – Il est interdit d'apprendre ces formules par cœur. Le plus important est de savoir les retrouver sur un dessin.  
 R2 – On peut aussi faire une comparaison série-intégrale dans le cas d'une fonction croissante.

**Propriété**

Si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  décroissante, **positive** et continue par morceaux alors

- (i)  $\sum f(n)$  converge si et seulement si  $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_n$  converge.  
 (ii) Si  $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ , alors  $\sum w_n$  converge.

**Démonstration**

- (i)  $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_n$  converge si et seulement si elle est majorée si et seulement si  $S_n$  est majorée si et seulement si  $\sum f(n)$  converge car ces suites sont croissantes.  
 (ii) Par comparaison à série intégrale,  $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n-1)$  donc  $0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n)$ .  
 Or le théorème de la limite monotone nous dit que  $(f(n))$  converge, donc par comparaison à une série télescopique à termes positifs,  $\sum w_n$  converge.  $\square$

**Remarque**

En cas de convergence, si on note  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim \int_0^n f(t) dt$ , on a en outre

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

**b****Séries de Riemann****Théorème : Séries de Riemann**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

**Démonstration**

Si  $\alpha \leq 0$ , il y a divergence grossière.

Si  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ,

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right)$$

a une limite finie si et seulement si  $\alpha > 1$ . Comme  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est positive, décroissante, et continue, on obtient le résultat.

Pour  $\alpha = 1$ , cela a déjà été vu et se retrouve avec  $\int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln n \rightarrow +\infty$ .  $\square$



### Exemple : Équivalent de la somme partielle harmonique

Soit  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Les hypothèses de la comparaison séries-intégrales étant vérifiées  $\sum w_n$  converge avec  $w_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n} = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$  soit  $\frac{1}{n} = \ln n - \ln(n-1) - w_n$ .

En sommant, on a  $H_n = \ln n - W_n - \ln 2$  où  $-W_n - \ln 2 = \sum_{k=1}^n w_k - \ln 2 \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$ .

Donc  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ .  $\gamma$  est appelée constante d'Euler.

Cela permet de retrouver le fait que  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge vers  $\ln 2$ .

### Remarques

R1 – On pose pour  $\alpha > 1$ ,  $\zeta(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ .  $\zeta$  est appelée fonction  $\zeta$  de Riemann.

R2 – Règle du  $n^\alpha u_n$  : Soit  $\sum u_n$  une série à termes réels positifs.

- S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $(n^\alpha u_n)$  est bornée (par exemple  $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ ), alors  $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  donc  $\sum u_n$  converge.
- S'il existe  $\alpha \leq 1$  tel que  $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$ , alors  $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$  donc  $\sum u_n$  diverge.
- S'il existe  $\alpha, \ell \in \mathbb{R}_*^+$  tels que  $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$ , alors  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

### Exemples

E1 –  $u_n = \frac{\cos n}{n^3}$ .

E2 –  $u_n = e^{-n^\beta}$  où  $\beta \in \mathbb{R}$ .

E3 –  $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{n}$ .

E4 –  $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$  pour  $\beta \in \mathbb{R}$ .

E5 –  $u_n = \frac{\text{Arctan } n}{\sqrt{n+1}}$

## C Évaluation des sommes partielles et des restes

### Exemples : Cas de divergence

E1 – Divergence et équivalent des sommes partielles de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$  :  $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$  est décroissante et positive sur  $[2, +\infty[$ .

Soit avec le  $w_n$ , soit : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt + \frac{1}{n \ln n} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \frac{1}{2 \ln 2} + \int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt$$

donc

$$\int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt + \frac{1}{n \ln n} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \frac{1}{2 \ln 2} + \int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt$$

donc

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n \ln n} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

Donc  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \rightarrow +\infty$ .

En fait, on a obtenu mieux que cela :  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$ .

E2 – Très classique :  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Par comparaison série-intégrale,

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n$$

donc  $H_n \sim \ln n$ .

Puis, si  $v_n = H_n - \ln n$ ,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

terme général d'une série convergente, donc  $v_n = H_n - \ln n \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$  où  $\gamma$  est appelé constante d'Euler.

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

E3 - Équivalent de  $\sum_{k=0}^n k^\alpha$  où  $\alpha > 0$ .

### Remarque

Plus généralement avec les hypothèses précédentes, si  $\sum f(n)$  diverge et  $f(n) \rightarrow 0$ ,  $S_n \sim F(n)$  où  $F$  primitive de  $f$ .

### Exemple : Cas de convergence

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ . On cherche une estimation de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ . Par comparaison à une intégrale,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

puis en faisant  $N \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

et  $R_n \sim \frac{1}{n}$  (convergence lente.) Pour une précision de  $10^{-2}$  dans le calcul de  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , il faut prendre  $n = 100$ .

Peut-on faire mieux? Oui! On a aussi

$$\left| S - \left( S_n + \frac{1}{n} \right) \right| = \left| R_n - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

En considérant  $S_n + \frac{1}{n}$ , on obtient une convergence en  $\frac{1}{n^2}$ . Cette fois  $n = 10$  suffit! On parle de technique d'accélération de convergence.

### Remarque

Plus généralement avec les hypothèses précédentes, si  $\sum f(n)$  converge de reste  $R_n$ ,  $I = \int_0^{\infty} f(t) dt$  et  $I_n = \int_0^n f(t) dt$ ,

$$I - I_{n+1} \leq R_n \leq I - I_n$$

ce qui permet d'avoir une estimation asymptotique de  $R_n$ .

## 4 Formule de Stirling

### Théorème : Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$



### Démonstration

- **Première étape** : On montre que  $n! \sim K(n/e)^n \sqrt{n}$  avec  $K > 0$ .

Soit  $u_n = \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}}$ . L'idée est de démontrer que  $(\ln u_n)$  converge, c'est-à-dire que la série  $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n) = \sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$  converge. Or

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{(1+1/n)^{n+1/2}}$$

donc

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge,  $\ln u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$  et  $u_n \rightarrow e^\ell = K$  d'où le résultat.

- **Deuxième étape** : Pour déterminer  $K$ , on utilise le résultat classique des intégrales de Wallis : si  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$ , alors  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$ , puis  $(I_n)$  décroît, puis  $I_{n+1} \sim I_n$ , puis  $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ , puis  $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$  donc  $I_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$  et

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{K\pi(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{2 \cdot 4^n K^2 n^{2n} e^{-2n} n} = \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$$

d'où  $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$  puis  $K \sim \sqrt{2\pi}$  donc  $K = \sqrt{2\pi}$ . □

## 5 Critère de d'Alembert

### Propriété : Critère de d'Alembert

Soit  $(u_n)$  suite à termes réels strictement positifs tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in [0, +\infty].$$

- Si  $\ell > 1$ ,  $\sum u_n$  diverge grossièrement.
- Si  $\ell < 1$ ,  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire en général (cas douteux).

### Démonstration

- Si  $\ell > 1$ , à partir d'un certain rang,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 = \frac{1}{1}$  avec  $\sum 1$  divergente donc il y a divergence (grossière). (En fait,  $u_n \rightarrow +\infty!$ )
- Si  $\ell < 1$  et  $\ell < k < 1$ , à partir d'un certain rang  $N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$  donc  $u_n \leq k^{n-N} u_N$  avec  $\sum k^n$  convergente. Donc, comme tout est positif, par comparaison,  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\ell > 1$ , on ne peut rien dire en général. Exemple :  $\sum \frac{1}{n}$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$ . □

### Exemple

Convergence de  $\sum \frac{n!}{n^n}$  de deux façons différentes. Autre justification possible : termes positifs et d'après la formule de Stirling,  $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ , donc  $\frac{n!}{n^n} \sim e^{-n} \sqrt{2\pi n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  par croissances comparées.

# III CONVERGENCE ABSOLUE

## Définition

Une série  $\sum u_n$  à valeur dans  $E$  est dite **absolument convergente** lorsque  $\sum \|u_n\|$  converge.

## Théorème : En dimension finie, convergence absolue $\Rightarrow$ convergence

Si  $E$  est de dimension finie et si  $\sum u_n$  converge absolument (donc si  $\sum \|u_n\|$  converge), alors  $\sum u_n$  converge. La réciproque est fausse.

## Démonstration

- Cas où  $E = \mathbb{R}$  : On écrit  $u_n = u_n^+ - u_n^-$  avec

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et } u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$  et  $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ ,  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent.

Donc, par linéarité,  $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$  converge.

- **Cas complexe** :  $\sum \Re u_n$  et  $\sum \Im u_n$  convergent absolument car  $|\Re u_n| \leq |u_n|$  et  $|\Im u_n| \leq |u_n|$  donc convergent.
- **Cas général** : Comme toutes les normes sont équivalentes, en considérant  $\|\cdot\|_\infty$ , on a  $\alpha > 0$  tel que  $\|\cdot\|_\infty \leq \alpha \|\cdot\|$ , on montre que chaque suite coordonnée de  $u$  est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour la réciproque fausse,  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente mais elle ne converge pas absolument.  $\square$

## Remarque

Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

## Propriété

Si  $\sum u_n$  est absolument convergente,  $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ .

## Remarque : Comparaison asymptotique pour les séries vectorielles

On compare  $\|u_n\|$  à une suite  $(v_n)$  à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que  $u_n = o(v_n)$  ou que  $u_n = O(v_n)$ , c'est dire que  $\|u_n\| = o(v_n)$  ou que  $\|u_n\| = O(v_n)$ .

Si  $\|u_n\| = o(v_n)$  ou  $O(v_n)$  ou  $\leq v_n$  apcr, ou  $\sim v_n$  alors la série  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.



# IV SOMMATION DES RELATIONS COMPARAISON

## 1 Cas de divergence

### Théorème

Soient  $u \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $v$  une suite réelle positive. On suppose que  $\sum v_n$  diverge.

On note  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $\Sigma_n = \sum_{k=0}^n v_k$ .

- (i) Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $S_n = O(\Sigma_n)$ .
- (ii) Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $S_n = o(\Sigma_n)$ .
- (iii) Si  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $u_n \sim v_n$ , alors  $S_n \sim \Sigma_n$ .

### Remarque

C'est encore valable si  $v_n \geq 0$  seulement à partir d'un certain rang.

### Démonstration

C'est le même principe que pour le théorème de Césaro. Comme  $\Sigma_n \rightarrow +\infty$ , on a un rang  $N_0$  à partir duquel  $\Sigma_n > 0$ .

- (i) On a  $M \in \mathbb{R}^+$  et un rang  $N$  tel que si  $n \geq N$ ,  $\|u_n\| \leq Mv_n$ .  
Si  $n \geq N$ ,  $\|S_n\| \leq \|S_N\| + M(\Sigma_n - \Sigma_N) \leq \|S_N\| + M\Sigma_n$ .  
Or  $\Sigma_n \rightarrow +\infty$ , donc on a un rang  $N'$  tel que si  $n \geq N'$ ,  $\|S_N\| \leq \Sigma_n$ .  
Ainsi, pour  $n \geq \max(N, N')$ ,  $\|S_n\| \leq (M+1)\Sigma_n$  et  $S_n = O(\Sigma_n)$ .
- (ii) Soit  $\varepsilon > 0$ . On a un rang  $N$  à partir duquel  $\|u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}v_n$ .  
Si  $n \geq N$ ,  $\|S_n\| \leq \|S_N\| + \frac{\varepsilon}{2}(\Sigma_n - \Sigma_N) \leq \|S_N\| + \frac{\varepsilon}{2}\Sigma_n$ .  
Si  $n \geq \max(N, N_0)$ ,  $\frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} \leq \frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} + \frac{\varepsilon}{2}$ .  
Et enfin  $\frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} \rightarrow 0$  donc on a un rang  $N'$  à partir duquel  $\frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .  
Donc, si  $n \geq \max(N, N_0, N')$ ,  $\|S_n\| \leq \varepsilon\Sigma_n$  et  $S_n = o(\Sigma_n)$ .
- (iii) Si  $u_n \sim v_n$  alors  $w_n = u_n - v_n = o(v_n)$ . Soit  $T_n = S_n - \Sigma_n = \sum_{k=0}^n w_k = o(\Sigma_n)$  par (ii).  
Donc  $S_n \sim \Sigma_n$ . □

### Exemples

E1 – Équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  en utilisant  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ terme général positif d'une série divergente, donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2 \sum_{k=0}^n u_n = 2\sqrt{n+1} - 0 \sim 2\sqrt{n}.$$

Se trouve aussi par comparaison série-intégrale.

E2 – Redémontrer le théorème de Césaro.

Si  $u_n \rightarrow \ell$  et  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ . On veut montrer que  $v_n \rightarrow \ell$  soit  $v_n - \ell = o(1)$ .

Or  $u_n - \ell = o(1)$  et 1 est un terme général positif de série divergente. Donc  $\sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = o\left(\sum_{k=1}^n 1\right) = o(n)$  soit encore, en divisant par  $n$ ,  $v_n - \ell = o(1)$ .

## 2 Cas de convergence

### Théorème

Soient  $u \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $v$  une suite réelle positive. On suppose que  $\sum v_n$  converge.

On note, sous réserve d'existence,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  et  $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ .

- (i) Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $R_n = O(\rho_n)$ .
- (ii) Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $R_n = o(\rho_n)$ .
- (iii) Si  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $u_n \sim v_n$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $R_n \sim \rho_n$ .

### Remarque

C'est encore valable si  $v_n \geq 0$  seulement à partir d'un certain rang.

### Démonstration

- (i) On a  $M \in \mathbb{R}^+$  et un rang  $N$  tel que si  $n \geq N$ ,  $\|u_n\| \leq Mv_n$  et  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

Si  $n, p \geq N$ ,  $\left\| \sum_{k=n+1}^p u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^p \|u_k\| \leq M \sum_{k=n+1}^p v_k$ . Puis, en faisant  $p \rightarrow +\infty$ ,  $\|R_n\| \leq M\rho_n$  donc  $R_n = O(\rho_n)$ .

- (ii) Soit  $\varepsilon > 0$ . On a un rang  $N$  à partir duquel  $\|u_n\| \leq \varepsilon v_n$  et  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente. Avec le même calcul en remplaçant  $M$  par  $\varepsilon$ , si  $n \geq N$ ,  $\|R_n\| \leq \varepsilon\rho_n$  donc  $R_n = o(\rho_n)$ .

- (iii) Si  $u_n \sim v_n$  alors  $|u_n| \sim v_n$  et  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

$w_n = u_n - v_n = o(v_n)$  donc  $\sum w_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = o(\rho_n)$ .

Or, si  $p \geq n$ ,  $\sum_{k=n+1}^p (u_k - v_k) = \sum_{k=n+1}^p u_k - \sum_{k=n+1}^p v_k$  donc, en faisant  $p \rightarrow +\infty$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = R_n - \rho_n = o(\rho_n)$  et donc  $R_n \sim \rho_n$ . □

# V DES SÉRIES CLASSIQUES

## 1 Séries de Bertrand



### Méthode : Séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq 0$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Hors programme, mais très classique.

Intuitivement, le terme en  $\ln$  n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où  $\alpha = 1$ , dans lequel le terme en  $\ln$  peut permettre d'accélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que  $\beta > 1$ .

On montre donc que la série converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou  $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$ .

- Si  $\alpha < 0$  ou si  $\alpha = 0$  et  $\beta \leq 0$ , il y a divergence grossière.
- Si  $\alpha < 1$  (englobe le cas précédent), ou si  $\alpha = 1$  et  $\beta \leq 0$ ,  $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$  à partir d'un certain rang et  $\sum \frac{1}{n}$  diverge donc  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  diverge.
- Si  $\alpha > 1$ , avec  $\gamma \in ]1, \alpha[$ ,  $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$  et donc par comparaison de termes généraux positifs et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\gamma}$  étant convergente,  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge.
- Si  $\alpha = 1$  et  $\beta > 0$ , on obtient la nature de la série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.



## 2 Série exponentielle

Soit  $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie munie d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire telle que

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \|a \times b\| \leq \|a\| \|b\|.$$

### Propriété

Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , la série de terme général  $\frac{1}{n!} a^n$  est convergente.

### Démonstration

Elle est absolument convergente par critère de d'Alembert. □

### Définition : Exponentielle

Si  $a \in \mathcal{A}$ , on pose  $\exp a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n$  appelé **exponentielle de  $a$** .

### Remarque

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Il suffit de trouver **une** norme vérifiant l'hypothèse pour que l'exponentielle soit définie. C'est toujours possible.

### Exemples

E1 – Dans  $\mathbb{C}$ ,  $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

E2 – Si  $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , norme adaptée?

On a  $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$  : il suffit de prendre  $\|\cdot\| = n \|\cdot\|_\infty$ .

Donc si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on peut poser  $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$  et oublier la norme.

Si  $A$  est diagonale, c'est facile!

Si  $A$  est nilpotente aussi : par exemple  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On verra d'autres propriétés plus tard et cela nous servira à résoudre des équations différentielles!

E3 – Idem dans  $\mathcal{L}(E)$  où  $E$  est de dimension finie.

## 3 Série géométrique

On se donne toujours  $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie munie d'une norme telle que

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \|a \times b\| \leq \|a\| \|b\|.$$

### Propriété

Si  $a \in \mathcal{A}$  et  $\|a\| < 1$ , alors la série de terme général  $a^n$  converge.

### Démonstration

Elle converge absolument. □

**Exemple**

Si  $a \in \mathcal{A}$  et  $\|a\| < 1$ , alors  $1_{\mathcal{A}} - a$  est inversible, d'inverse  $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ .

En particulier, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et s'il existe une norme sous-multiplicative telle que  $\|A\| < 1$ , alors  $I_n - A$  est inversible d'inverse  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ .

# VI PRODUIT DE CAUCHY

**Définition : Produit de Cauchy**

Soient  $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ .

La série de terme général  $w_n$  est appelée **produit de Cauchy** de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

**Remarque**

Il s'agit d'une sommation par diagonales.

**Théorème**

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes, alors  $\sum w_n$  l'est aussi. De plus,  $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

**Exemple**

Si  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,  $\exp(z + z') = \exp z \times \exp z'$ .

En effet, les séries de termes généraux  $\frac{z^n}{n!}$  et  $\frac{z'^n}{n!}$  convergent absolument et

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z + z')^n}{n!}.$$

L'argument se transporte aux éléments d'une algèbre de dimension finie (donc par exemple aux matrices) avec une hypothèse de commutation pour la formule du binôme (et une version admise du produit de Cauchy) : si  $ab = ba$ ,  $\exp(a + b) = \exp a \exp b$ .

**Démonstration**

**Cas où  $u, v \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$**  On pose  $U_N, V_N$  et  $W_N$  les sommes partielles.

Dessin :  $I \subset J \subset K$  où

- $I$  est le carré des couples  $(p, q)$  tels que  $p, q \in \llbracket 0, N \rrbracket$
- $J$  est le triangle des couples  $(p, q)$  tels que  $p + q \leq 2N$
- $K$  est le carré des couples  $(p, q)$  tels que  $p, q \in \llbracket 0, 2N \rrbracket$

Alors  $\sum_{(p,q) \in I} u_p v_q = U_N V_N \leq \sum_{(p,q) \in J} u_p v_q = W_{2N} \leq \sum_{(p,q) \in K} u_p v_q = U_{2N} V_{2N}$  car les termes sont positifs.

Par encadrement, on en déduit que  $W_{2N}$  converge vers  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

Mais comme  $(W_n)$  est croissante,  $W_{2N} \leq W_{2N+1} \leq W_{2N+2}$  donc par encadrement,  $W_{2N+1}$  converge vers la même limite.

Finalement,  $\sum w_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .



**Cas général** Le premier cas permet de voir que  $\sum c_n$  converge avec  $c_n = \sum_{p+q=n} |u_p v_q|$ . On note  $C_N$  la somme partielle ainsi que  $A_N$  et  $B_N$  les sommes partielles des séries de terme général  $|u_n|$  et  $|v_n|$ .

Mais  $|w_n| \leq c_n$  par inégalité triangulaire, donc par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum w_n$  converge absolument.

Puis  $|U_N V_N - W_N| = \left| \sum_{(p,q) \in L} u_p v_q \right|$  où  $L$  est le triangle des  $p, q \in \llbracket 0, N \rrbracket$  tels que  $p+q > N$ .

Donc  $|U_N V_N - W_N| \leq \sum_{(p,q) \in L} |u_p| |v_q| = A_N B_N - C_N \rightarrow 0$  d'après le premier cas.

□

### Exemple

Si  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $|a| < 1$ , alors  $\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n$ .

En effet, c'est le produit de Cauchy de la série géométrique absolument convergente de terme général  $a^n$  avec elle-même.

### Remarque

L'hypothèse d'absolue convergence est indispensable, le résultat n'est pas assuré pour des séries semi-convergentes.

### Exemple

Si  $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ , alors  $|w_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$ . Donc  $\sum w_n$  diverge grossièrement.