Espaces Vectoriels Normés

Extrait du programme officiel :

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.

Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\\|\ \\|_1$, $\\|\ \\|_2$, $\\|\ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.
i) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.	Démonstration non exigible.

TABLE DES MATIÈRES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Norme sur un espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Norme et distance

Définition : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur E tout application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité : Pour tout $x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E,N) est un **espace vectoriel normé**.

Remarques

R 1 – Souvent notée $\|\cdot\|$ également.

R 2 – Pas de cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Exemple

Valeur absolue sur $\mathbb{R}$ (y en a-t-il d'autres ?) et module sur $\mathbb{C}$.

Propriété

Soit (E,N) un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.

(i) $N(0_E) = 0_{\mathbb{R}}$

(ii) $N(-x) = N(x)$

(iii) $\left|N(x) - N(y)\right| \leqslant N(x \pm y) \leqslant N(x) + N(y)$

Définition : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé (E,N), un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $N(x) = 1$.

Remarque

Si $x \neq 0_E$, $\frac{1}{N(x)}x$ est le vecteur normé associé à x (de même direction et de même sens.)

Définition : Distance associée à une norme

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

On appelle **distance** associée à N l'application $\mathrm{d} : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & N(x-y) \end{array} \right.$.

Propriété

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, d distance associée, $x, y, z \in E$.

(i) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.

(ii) ***Symétrie*** : $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) ***Double inégalité triangulaire*** :

$$\left|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y)\right| \leqslant \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y).$$

Remarque

Il existe une notion plus générale (Hors Programme) de distance sur un ensemble E : c'est une application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ symétrique, telle que $d(x,y) = 0 \iff x = y$ et vérifiant l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. On dit alors que (E, d) est un **espace métrique**.

C'est bien le cas de la distance associée à une norme.

2 Normes usuelles

a Sur $\mathbb{K}^n$

Définition

On définit, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|.$$

Propriété

Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Pour $\|\|_2$ sur $\mathbb{R}$,l'inégalité triangulaire (dite de Minkowski) vient de celle de Cauchy-Schwarz, qu'on peut redémontrer.
On déduit l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$ de celle sur $\mathbb{R}$. □

Remarques

R1 – On peut montrer que plus généralement, si $p \geqslant 1$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et même que $\|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty$ d'où la notation.

R 2 – Plus généralement, sur un K-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on décompose un vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et on pose $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$ et $\|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$ qui définissent des normes sur E.

Exemple

Matrices, polynômes.

b Rappels de première année

Théorème

Si f est continue sur $[a,b]$, de signe constant et si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $[a,b]$.

Définition : Bornes inférieure et supérieure

La **borne inférieure borne supérieure** d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ sont, respectivement, lorsqu'ils existent, le plus grand des mainorants de A et le plus petit des majorants de A.

Remarque

S'il y a un maximum (respectivement un minimum), c'est la borne supérieure (respectivement la borne inférieure). Cela arrive si et seulement si la borne supérieure (respectivement inférieure) est en dans A.

Théorème

Toute partie non vide majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement inférieure).

Remarque

Dire qu'un majorant α de A est sa borne supérieure revient à dire que tout $M < \alpha$ ne peut pas être un majorant de A. D'où les caractérisations suivantes.

Propriété : Caractérisation locale de la borne supérieure

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et α un majorant de A.
Alors $\alpha = \sup A$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < x$ $(\leqslant \alpha)$.

Propriété : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et α un majorant de A.
Alors $\alpha = \sup A$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers α.

Remarque

Autrement dit, la borne supérieure est le seul majorant limite d'une suite d'éléments de l'ensemble.

Définition : Borne supérieure d'une application

Si X est un ensemble non vide, f majorée sur X à valeur dans $\mathbb{R}$, on pose $\sup_X f = \sup_{x\in X} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in X\}$.
Il s'agit du plus petit des majorants de f.

Propriété

Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ des fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un K-espace vectoriel.

Remarque

C'est même une $\mathbb{K}$-algèbre.

c Sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$

Définition

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Propriété

Il s'agit d'une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$.

d Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

Définition

On définit, pour $f \in E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

$$N_1(f) = \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x \quad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad N_\infty(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Remarque

Pour $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, on a même $N_\infty(f) = \max_{[a,b]} |f|$.

Propriété

Il s'agit de normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

3 Boules et sphères

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
Boule ouverte de centre a et de rayon r : $B(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| < r\}$.
Boule fermée de centre a et de rayon r : $\overline{B}(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| \leqslant r\}$.
Sphère de centre a et de rayon r : $S(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| = r\}$.

Exemples

E 1 – Cas où $r = 0$.
E 2 – Cas de $\mathbb{R}, |\cdot|$.
E 3 – Boule unité fermée dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles.

Définition : Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque pour tout $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in A$.

Remarque

$\{tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]\}$ représente le segment formé par les extrémités des vecteurs x et y.

Propriété

Les boules sont convexes.

4 Parties, suites et fonctions bornées

Définition : Partie bornée

$A \in \mathscr{P}(E)$ est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant M$.

Propriété

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est bornée.

Remarque

Une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (par exemple fermée).

Définition : Fonction bornée

Soit X un ensemble non vide, $f \in E^X$.
On dit que f est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$ (ie si $f(A)$ est une partie bornée de E.)
On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées.

Propriété

On pose, pour $f \in \mathscr{B}(X,E)$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$, bien défini.
Alors (E, N_∞) est un espace vectoriel normé.

On obtient en particulier, pour $X = \mathbb{N}$:

Définition : Suite bornée

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in N$, $\|u_n\| \leqslant M$ (ie si $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.)
On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées.

Remarque

On peut aussi définir une norme infinie sur l'ensemble des suites bornées.

5 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Propriété

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, $N(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} N_k(x_k)$.
*Alors N est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ appelée **norme produit**.*

Remarque

En prenant $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$, la norme produit sur $\mathbb{K}^n$ est $\|\cdot\|_\infty$.

II Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul.

1 Convergence d'une suite

Définition : Suite convergente, divergente

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.
On dit que u **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel u_n est à distance au plus ε de ℓ.
Autrement dit $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$.
Dans ce cas, on dit que u est **convergente** et que ℓ est sa **limite**. On note $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$.
Lorsque u n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Remarques

R 1 – $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.
R 2 – $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B(\ell, \varepsilon)$.
R 3 – La convergence dépend a priori de la norme.

Définition

Si $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f \in E$.
Si $f_n \xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en moyenne**.
Si $f_n \xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en moyenne quadratique**.
Si $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

Théorème : Unicité de la limite

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $u_n \longrightarrow \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Propriété

Toute suite convergente est bornée.

Propriété

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell\|$.

Propriété

Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow \ell$.

2 Opérations algébriques

Propriété : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \longrightarrow \ell + \lambda \ell'$.

Propriété

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \longrightarrow \alpha \ell$.

3 Suite à valeurs dans un produit

Propriété

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, N la norme produit sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, $u = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\right) \in (E_1 \times \cdots \times E_p)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$.

Alors $u \xrightarrow{N} \ell$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k$.

III Comparaison de normes

Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. On note $B_1(a,r)$ (respectivement $B_2(a,r)$) une boule ouverte pour N_1 (respectivement N_2).

1 Domination

Définition : Domination

On dit que N_1 est dominée par N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.

Remarques

R 1 – Traduction avec les boules : $B_2(a, r/\alpha) \subset B_1(a, r)$.

R 2 – Si une partie ou une fonction est bornée pour N_2, elle l'est automatiquement pour N_1 aussi.

Propriété

Soit N_1 dominée par N_2 ; $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$.

Remarque

Si N_1 n'est pas dominée par N_2, on fabrique une suite qui tend vers 0 pour N_1 et diverge pour N_2 : $N_2(x_n) < nN_1(x_n)$. Il suffit de poser $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}N_1(x_n)}x_n$...

Méthode : Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

On peut chercher une suite (u_n) telle que $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$ ou alors telle que $N_2(u_n) \longrightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$.

2 Équivalence

a Définition

Définition : Normes équivalentes

N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$.

Remarque

C'est une relation d'équivalence.

Propriété

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.

b Cas de $\mathbb{R}^n$

Propriété

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

Visualiser avec des boules.
$\| \|_1 \leqslant n \| \|_\infty$ cas d'égalité : vecteur constant.
$\| \|_\infty \leqslant \| \|_1$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1.
$\| \|_1 \leqslant \sqrt{n} \| \|_2$ CS - cas d'égalité : celui de CS = tous égaux.
$\| \|_2 \leqslant \| \|_1$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1.
$\| \|_2 \leqslant \sqrt{n} \| \|_\infty$ cas d'égalité : tous égaux.
$\| \|_\infty \leqslant \| \|_2$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1. □

c Cas de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Propriété

Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,
- *$N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_1.*
- *$N_2 \leqslant \sqrt{b-a}N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_2.*
- *$N_1 \leqslant \sqrt{b-a}N_2$ et N_2 n'est pas dominée par N_1.*

Démonstration

$N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$: plus facile de converger en moyenne qu'uniformément. Égalité pour une fonction constante.
$N_2 \leqslant \sqrt{b-a}N_\infty$: égalité pour f constante.
$N_1 \leqslant \sqrt{b-a}N_2$ par Cauchy-Schwarz. Égalité pour f constante.
N_∞ n'est pas dominée par N_1 : sur $[0,1]$, f_n telle que $N_\infty(f_n) = n$ et $N_1(f_n) = \frac{1}{2n}$: triangle entre $(0,n)$ et $(1/n^2,0)$.
Avec la même suite de fonctions, $N_2(f_n) = \frac{1}{\sqrt{3}}$: N_2 n'est pas dominée par N_1.
Et donc N_∞ n'est pas dominée par N_2, sinon elle le serait par N_1... □

d Cas de la dimension finie

Théorème

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Démonstration

Non exigible, admis provisoirement. □

Propriété

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

IV SUITES EXTRAITES, VALEURS D'ADHÉRENCE

Définition : Suite extraite

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in E^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans E) de suite extraite de u.

Exemple

Valeurs d'adhérence de $(-1)^n$.

Propriété

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Remarque

Réciproque fausse.

Exemple

$u_n = n$ si n est pair et 0 sinon.

Corollaire

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Théorème : de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.

Remarque

On verra plus tard une généralisation dans les espaces vectoriels normés.