Réduction

Extrait du programme officiel :

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de MPSI et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Matrices semblables, interprétation géométrique.	Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F.
b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	⇆ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
c) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_u, χ_A. Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.	La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.
Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	
d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.	Cas des projecteurs, des symétries.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	
Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.	La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n=2$ et à des cas particuliers simples pour $n=3$.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. ⇆ I : recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x)=\lambda\,x$, alors $P(u)(x)=P(\lambda)\,x$.
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.

h) Lemme de décomposition des noyaux

Si $P_1,\dots,P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\left(P_i(u)\right).$$

i) Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.	

j) Endomorphismes à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

TABLE DES MATIÈRES

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I SOUS-ESPACES STABLES

1 Point de vue géométrique

Définition

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E, F est dit stable par u lorsque $u(F) \subset F$ c'est-à-dire $\forall\, x \in F,\;\; u(x) \in F$.

Lorsque c'est le cas, $u_F : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$, appelé **endomorphisme induit par u sur F** est bien défini.

Exemple

$\{0_E\}$ et E sont stables par u.

Remarque

$$u_F \neq u_{|F} : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. .$$

Propriété

Si F est de dimension finie $p > 0$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, alors F est stable par u si et seulement si $\forall\, j \in [\![1, p]\!],\ \ u(e_j) \in F$.

Démonstration

Conséquence immédiate de la linéarité. □

Propriété

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent, l'image et le noyau de l'un sont stables par l'autre.

Démonstration

Vu en TD. □

2 Point de vue matriciel

Soit M écrite par blocs $M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{F}{\underset{p}{\leftrightarrow}} & \overset{G}{\underset{q}{\leftrightarrow}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \begin{array}{l} p \updownarrow F \\ q \updownarrow G \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est représenté par M dans une base $\mathscr{B}$, alors on peut séparer $\mathscr{B}$ de taille $p + q$ en deux sous-familles :

- les p premiers vecteurs engendrant un sous-espace F de E
- les q derniers vecteurs engendrant un sous-espace G.

Alors F et G sont supplémentaires de E ($F \oplus G = E$.)

Alors, si $x \in E$, x_F et x_G ses composantes sur F et G (donc $x = x_F + x_G$), x est représenté dans $\mathscr{B}$ par $X = \begin{pmatrix} X_F \\ X_G \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$ où X_F et X_G représentent x_F et x_G. Alors $u(x)$ est représenté dans $\mathscr{B}$ par

$$MX = \begin{pmatrix} AX_F + BX_G \\ CX_F + DX_G \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$$

représentant respectivement les composantes sur F et G de $u(x)$.

Cela se généralise à un nombre quelconque de sous-espaces.

Exercice

Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $E = F \oplus G$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

- *F est stable par u si et seulement si $C = 0$.*
- *G est stable par u si et seulement si $B = 0$.*

Démonstration

Si $C = 0$, l'image d'une base de F est dans F, donc c'est vrai pour tous les vecteurs de F par linéarité.
Si F stable par u, alors la composante sur G des image des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans F est nulle donc $C = 0$. □

Exemple

Projections et symétries

Propriété : Généralisation

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathscr{L}(E)$.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale par blocs ($A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$) si et seulement si chaque E_i est stable par u.
On peut alors considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur E_i dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_i$ (issue de $\mathscr{B}$) est A_i.

Remarque

On retrouve le résultat classique qu'alors u est uniquement déterminé par la donnée des u_i.

Exercice

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Montrer que H est stable par u.
2. Soit $x = (3, 2, 1)$ et $D = \mathrm{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u.
3. Justifier que $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs, à cœfficients entiers.

II ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME ET D'UNE MATRICE CARRÉE

1 Cas d'un endomorphisme

Remarque

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et D droite de E, on a $a \neq 0_E$ tel que $D = \mathrm{Vect}\, a$. D stable par u ssi $u(a) \in D$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \ u(a) = \lambda a$.

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

- On appelle **valeur propre** de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

- L'ensemble des valeurs propres de u est appelé son **spectre**, noté $\mathrm{Sp}\,u$ ou $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}\,u$.

Remarques

R 1 – λ est valeur propre de u ssi $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$ ssi $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ non injectif.
En particulier, 0 est valeur propre de u ssi $\mathrm{Ker}\,u \neq \{0_E\}$ ssi u non injectif.

R 2 – $E_\lambda(u)$ est constitué des vecteurs propres associés à λ **et** du vecteur nul.

Exemples

E 1 – $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $u : f \mapsto f'$. $\mathrm{Sp}\,u = \mathbb{R}$, $E_\lambda(u) = \{x \mapsto \alpha e^{\lambda x}, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

E 2 – $E = \mathbb{R}[X]$ et $u : P \mapsto P'$. $\mathrm{Sp}\,u = \{0\}$, $E_0(u) = \mathbb{R}_0[X]$.

E 3 – Homothétie $u = \lambda\,\mathrm{id}_E$. $\mathrm{Sp}\,u = \{\lambda\}$, $E_\lambda(u) = E$.

E 4 – Projection p : $\mathrm{Sp}\,p \subset \{0, 1\}$, $E_1(p) = \mathrm{Im}\,p$, $E_0(p) = \mathrm{Ker}\,p$.

Propriété

Les droites stables par u sont les droites engendrées par un vecteur propre de u.

Propriété

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Démonstration

Si λ valeur propre de u et $x \in E_\lambda(u)$, alors $u(x) = \lambda x$ et $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda(u)$. $\square$

Propriété

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.

Alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont en somme directe ie $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur le nombre p de sous-espace propres.
Il n'y a rien à faire pour un seul.
Soit $p \geqslant 1$ tel que ce soit vrai pour pour $p-1$ sous-espaces propres, et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes.
Si $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$ (1) où pour tout i, $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, alors en composant par u on obtient $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E$ (2).

Alors $(2)-\lambda_p(1)$ donne $\underbrace{(\lambda_1-\lambda_p)x_1}_{\in E_{\lambda_1}(u)}+\cdots+\underbrace{(\lambda_{p-1}-\lambda_p)x_{p-1}}_{\in E_{\lambda_{p-1}}(u)}=0_E$ donc par hypothèse de récurrence, pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, $(\lambda_i-\lambda_p)x_i=0_E$.

Et comme les valeurs propres choisies sont deux à deux distinctes, pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, $x_i=0_E$.

Et enfin, avec (1), $x_p=0_E$ ce qui établit la récurrence. □

Corollaire

Des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants (forment une famille libre).

Démonstration

Avec les mêmes notations, si on a $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{K}$ et pour tout i, $x_i\in E_{\lambda_i}(u)$, et si $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_px_p=0_E$ alors vu la somme directe, pour tout i, $\alpha_ix_i=0_E$. Mais comme ce sont des vecteurs propres, $x_i\neq 0_E$ et donc $\alpha_i=0$. □

Exemple

$\left(x\mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

Corollaire

Si E est de dimension finie et $u\in\mathscr{L}(E)$, alors $\left|\operatorname{Sp} u\right|\leqslant\dim E$.

Démonstration

Une famille libre de vecteurs de E possède toujours au plus $\dim E$ vecteurs. □

2 Cas d'une matrice

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- On appelle **valeur propre** de A tout $\lambda\in\mathbb{K}$ tel qu'il existe $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AX=\lambda X$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace

$$E_\lambda(A)=\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)=\left\{X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\mid AX=\lambda X\right\}.$$

- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé son **spectre**, noté $\operatorname{Sp} A$ ou $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}} A$.

Remarques

R 1 – Les éléments propres d'une matrice sont ceux de l'application linéaire canoniquement associée (via la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

R 2 – Si $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}} A\subset\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A$ car des vecteurs propres dans $\mathbb{K}$ sont en particulier des vecteurs propres dans $\mathbb{C}$.

Exemple

$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ est telle que $A^2=-I_2$. Les valeurs propres vérifient $\lambda^2=-1$.
Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A=\varnothing$.
Mais Avec le même argument, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A\subset\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$.
Or $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\iff x=\mathrm{i}y$: $\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$ vecteur propre associé à la valeur propre i, et $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\mathrm{i}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\iff x=-\mathrm{i}y$: $\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$ vecteur propre associé à la valeur propre $-\mathrm{i}$ et donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A=\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$.

Propriété

Si $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$, $\mathscr{B}$ est une base de E, et $u\in\mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A, alors $\mathrm{Sp}\,u=\mathrm{Sp}\,A$.

Et plus précisément les vecteurs propres et sous-espaces de A sont les représentations dans la base $\mathscr{B}$ de ceux de u.

3 Polynôme caractéristique

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\neq 0$. Si $u\in\mathscr{L}(E)$,

$$\begin{aligned}\lambda\in\mathrm{Sp}\,u &\iff \exists x\neq 0_E,\quad u(x)=\lambda x\\ &\iff \exists x\neq 0_E,\quad (u-\lambda\,\mathrm{id}_E)(x)=0_E\\ &\iff \mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_E)\neq\{0_E\}\\ &\iff u-\lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non injective}\\ &\iff u-\lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non bijective}\end{aligned}$$

Propriété

Si $u\in\mathscr{L}(E)$, $\lambda\in\mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si $u-\lambda\,\mathrm{id}_E\notin\mathscr{GL}(E)$ si et seulement si $\det(u-\lambda\,\mathrm{id}_E)=0$.

Remarques

R 1 – En dimension infinie, $u-\lambda\,\mathrm{id}_E\notin\mathscr{GL}(E)\not\Longrightarrow\lambda$ valeur propre de u, car $u-\lambda\,\mathrm{id}_E$ pourrait être injectif sans être bijectif.

R 2 – En particulier, $u\in\mathscr{GL}(E)$ si et seulement si $0\notin\mathrm{Sp}\,u$.

De la même manière,

Propriété

Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda\in\mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_n\notin\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A-\lambda I_n)=0$.

Remarque

En particulier, $u\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $0\notin\mathrm{Sp}\,u$.

Comme, pour $x\in\mathbb{K}$, $\det(xI_n-A)=(-1)^n\det(A-xI_n)$ est polynomial en x, on peut définir :

Définition : Polynôme caractéristique

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u\in\mathscr{L}(E)$ où E est de dimension finie.
- On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme $\chi_A=\det(XI_n-A)$.
- On appelle **polynôme caractéristique** de u le polynôme $\chi_u=\det(X\,\mathrm{id}_E-u)$.

Exemple

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2 + 1$.

Propriété

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses cœfficients diagonaux.

Exercice

Montrer que A et $A^\intercal$ ont même polynôme caractéristique.

Propriété

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Les racines de χ_A (respectivement χ_u) sont exactement les valeurs propres de A (respectivement u).*
- *Si $\mathscr{B}$ base de E tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors $\chi_u = \chi_A$.*
- *χ_A est de degré n unitaire. Plus précisément,*

$$\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

χ_u est de degré n unitaire. Plus précisément,

$$\chi_u = X^n - (\operatorname{tr} u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

Remarques

R 1 – Les cœfficients se retrouvent facilement en considérant le cas d'une matrice triangulaire et en utilisant les relations cœfficients-racines.

R 2 – En dimension 2, on a immédiatement $\det A = X^2 - \operatorname{tr} A A + \det A$.

Démonstration

- Déjà vu.
- Si $\mathscr{B}$, $x \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x\,\mathrm{id}_E - u) = xI_n - A$.
-

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & & (-a_{i,j}) \\ & \ddots & \\ (-a_{i,j}) & & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n},$$

où les $m_{i,j}$ sont des polynômes de degré 0 (s'il vaut $-a_{i,j}$) ou 1 (s'il vaut $X - a_{i,i}$).
On a donc $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$. On remarque que si $\sigma \neq \mathrm{id}$, on a au moins deux termes constants dans le produit (car σ injective), donc

$$\chi_A = (X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n}) + Q$$

où $\deg Q \leqslant n-2$. Soit encore

$$\chi_A = X^n - \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} X^{n-1} + Q_1 = X^n - (\operatorname{tr} A) X^{n-1} + Q_1$$

où $\deg Q_1 \leqslant n-2$.

Donc χ_A est de degré n, unitaire et de cœficient en X^{n-1} égal à $-\operatorname{tr} A$.

Le cœfficient constant est $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$.

- Il suffit de considérer une matrice dans une base de E et utiliser le point précédent. □

Propriété

Le polynôme caractéristique et le spectre sont des invariants de similitude.

Démonstration

Des matrices semblables représentent un même endomorphisme. □

Propriété

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E stable par u, u_F endomorphisme induit par u sur F.
Alors χ_{u_F} divise χ_u.

Démonstration

Soit $\mathscr{B}_F$ base de F complétée en $\mathscr{B}$ base de E. Alors la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$ où A est la matrice dans $\mathscr{B}_F$ de u.

Alors $\chi_u = \chi_M = \begin{vmatrix} XI_p - A & -B \\ (0) & XI_{n-p} - C \end{vmatrix} = \chi_A \times \chi_C$ est divisible par $\chi_A = \chi_{u_F}$. □

4 Multiplicité des valeurs propres

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition : Multiplicité d'une valeur propre

La **multiplicité** d'une valeur propre λ de u (respectivement A) est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Propriété

Le nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicités est toujours au plus égal à n (dimension de E ou taille de la matrice).
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a toujours égalité.

Propriété

Si λ valeur propre de u (respectivement A) d'ordre m_λ, $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$ $\quad \big($respectivement $1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant m_\lambda\big)$.

Démonstration

Soit $d_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.
On a déjà comme λ valeur propre que $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit au vecteur nul et donc $d_\lambda \geqslant 1$.
De plus, comme $E_\lambda(u)$ est stable par u, si on note u_λ l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$, χ_{u_λ} divise χ_u.
Or $u_\lambda : \left| \begin{array}{ccc} E_\lambda(u) & \longrightarrow & E_\lambda(u) \\ x & \longmapsto & u(x) = \lambda x \end{array} \right.$ donc $u_\lambda \lambda \mathrm{id}_E$ donc $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{d_\lambda}$.
Cela prouve finalement que $d_\lambda \leqslant m_\lambda$.
Pour la matrice, il suffit de passer par n'importe quel endomorphisme qu'elle représente. □

Corollaire

Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est de dimension 1.

Propriété

Si χ_A est scindé, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités respectives $m_1,\dots,m_p$, alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}$, $\sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i = \operatorname{tr} A$ et $\prod_{i=1}^{p}\lambda_i^{m_i} = \det A$.

On a un énoncé analogue pour u.

Démonstration

Ce sont les relations cœfficients racines, avec $\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$. □

Remarques

R 1 – Se retrouve facilement avec les matrices triangulaires.

R 2 – Ce n'est plus vrai si χ_A n'est pas scindé.

5 Cas particulier des matrices réelles

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice dans laquelle on conjugue tous les cœfficients. On a facilement $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ et $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ lorsque ces opérations sont bien définies.

Propriété

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, λ valeur propre complexe de A de multiplicité m.

- *$\overline{\lambda}$ est valeur propre de A de multiplicité m.*
- *Si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de A associé à λ, $\overline{X}$ est vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$.*
- *Si $d = \dim E_\lambda(A)$, $(e_1,\dots,e_p)$ une base de $E_\lambda(A)$, alors $\left(\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_p\right)$ base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$ de dimension d.*

Démonstration

On sait (en utilisant la caractérisation de la multiplicité par les dérivées) si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{\lambda}$ est racine de P du même ordre.

En appliquant cela au polynôme caractéristique de A et en remarque que $AX = \lambda X$ implique $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, on peut conclure.

On a aussi facilement que la conjugaison ne change pas l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. □

Exercice

Si n est impair, il y a toujours au moins une valeur propre réelle.

III Diagonalisation

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1 Diagonalisabilité des endomorphismes

Définition : Diagonalisabilité d'un endomorphisme

u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exemple

Homothéties, projections, symétries, affinités.

Propriété : Caractérisation 1

u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Une telle base est dite **diagonalisante**.

Propriété : Caractérisation 2

u est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de u est égale à E ($E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} E_\lambda(u)$.)

Démonstration

Dans un sens on prend une base adaptée à la décomposition, dans l'autre on décompose tout $x \in E$ dans une base de vecteurs propres. □

Exemple

Projecteurs, symétries.

Propriété : Caractérisation 3

u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de sous-espaces stables sur lesquelles u induit une homothétie.

Propriété : Caractérisation 4

u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim E_\lambda(u) = \dim E$.

Propriété : Caractérisation 5

u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.

Démonstration

$\Longrightarrow$ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base diagonalisante, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes associées, $d_1, \dots, d_p$ les dimensions des sous-espaces propres associés.

Alors, matrice dans $\mathscr{B}$ étant diagonale $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{d_i}$ et donc $m_{\lambda_i} = d_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$.

$\Longleftarrow$ Si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$, alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ donc u est diagonalisable.

□

Propriété : Condition suffisante

Si χ_u est scindé simple, alors u est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont des droites vectorielles (ie de dimension 1).

Démonstration

Il y a $\dim E$ valeurs propres et comme chaque sous-espace est dimension au moins 1 et que la somme de leurs dimensions est majorée par celle de E, elles sont toutes égales à 1, la somme des dimensions vaut $\dim E$ et u est diagonalisable. □

Corollaire : Condition suffisante

Si u possède n valeurs propres distinctes en dimension n, alors u est diagonalisable.

2 Matrices carrées diagonalisables

Définition : Diagonalisabilité d'une matrice carrée

A est dite **diagonalisable** sur $\mathbb{K}$ si son endomorphisme canoniquement associé l'est.

Vu la définition de la diagonalisabilité d'un endomorphisme, on en tire immédiatement :

Propriété : Caractérisation

*A est **diagonalisable** sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ ie $D = P^{-1}AP$.*

Remarque

P n'est pas unique alors que D l'est : elle va contenir les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

Avec la définition, il s'agit de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ vers une base diagonalisante de E pour u.

Propriété

Si u est n'importe quel endomorphisme représenté par A, alors A est diagonalisable si et seulement si u l'est.

Démonstration

P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans laquelle A représente u à une base diagonalisante. □

Remarques

R 1 – Ne pas dire qu'il y a une base dans laquelle A est diagonale !

R 2 – En passant par exemple par l'endomorphisme canoniquement associé, les caractérisations vues pour les endomorphismes s'adaptent aux matrices :

A est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres

si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de A est égale à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

si et seulement si $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim E_\lambda(A) = n$

si et seulement si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} A, m_\lambda = \dim E_\lambda(A)$

si χ_A est scindé simple (n valeurs propres distinctes).

R 3 – Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à A, et si on a une base diagonalisante $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, elle est constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors la formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et pour tout i, $u(e'_i) = \lambda_i e'_i$.
P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}'$, donc ses colonnes contiennent directement les composantes des n-uplets $e'_1, \ldots, e'_n$.
Dans la pratique, on travaille directement matriciellement, les colonnes correspondant (dans la base canonique) aux e'_i sont directement des vecteurs propres de A.

Exercice

Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

Méthode : Diagonaliser une matrice diagonalisable A

1. Déterminer les valeurs propres, par exemple avec χ_A. (Parfois du bon sens (de l'observation) suffit. Essayer de sommer les colonnes, par exemple).
2. Chercher une base de chaque sous-espace propre.
   Si on a calculer χ_A par une méthode du pivot de Gauss, on peut reprendre la forme échelonnée finale et évaluer en λ pour finir la résolution du système !
3. Justifier alors que A est diagonalisable.
4. Déterminer une base de vecteurs propres : il suffit de concaténer des bases de chaque sous-espace propre vu qu'ils sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
5. Calculer P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (qui sont directement les colonnes de P).
6. Poser D la matrice diagonale formée des valeurs propres associées à chaque vecteur propre de la base, dans le même ordre.
7. On a alors $A = PDP^{-1}$ (en appliquant une formule de changement de base à l'endomorphisme canoniquement associé à A.)

Exemple

Diagonalisation de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-5 & -1 & 1 \\ -2 & X-4 & 2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ -2 & X-4 & 2 \\ X-5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-6 & -2(X-4) \\ 0 & X-6 & (X-4)^2 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-6 & -2(X-4) \\ 0 & 0 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} = (X-2)(X-4)(X-6)$$

Avec $L_1 \leftrightarrow L_3$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + (X-5)L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}$: 3 valeurs propres distinctes en dimension 3 donc A est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Puis, en appliquant un pivot de gauß similaire à celui du calcul du polynôme caractéristique (il suffit d'évaluer le dernier déterminant en la valeur propre),

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff \begin{cases} -x+y-z = 0 \\ -4y+4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  Autre méthode : $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: $C_2 + C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ qui est une droite donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  Si on ne sait pas déjà que c'est une droite, on vérifie (C_1, C_2) libre donc le rang vaut 2 et le noyau est de dimension 1 par théorème du rang.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(A) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$ donc $E_4(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6(A) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y+3z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$ donc $E_6(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une base de vecteurs propres et la formule de changement de base (appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à A entre la base canonique et $\mathscr{B}' = \big((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\big)$ donne $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Applications de la diagonalisation

a Calculs de puissances

Méthode

Si on diagonalise $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, valable dans $\mathbb{Z}$ si A est inversible c'est-à-dire si 0 n'est pas valeur propre.

Exemple

Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{array} \right.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, alors $X_{n+1} = AX_n$ donc pour tout n, $X_n = A^n X_0$.

Or $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$ et donc $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2 + (-1)^{n+1} & 2 + (-1)^{n+1} \\ 2 + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2 + (-1)^{n+1} \\ 2 + (-1)^{n+1} & 2 + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.

D'où x_n, y_n, z_n exprimés en fonction de x_0, y_0, z_0.
On peut même calculer le résultat sans calculer P^{-1} !

Si on pose $Y_n = P^{-1}X_n$, $Y_{n+1} = DY_n$ donc $Y_n = D^n Y_0$ et donc $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n(\lambda+\mu)+2^n\nu \\ (-1)^{n+1}\lambda+2^n\mu \\ (-1)^{n+1}\mu+2^n\nu \end{pmatrix}$.

b Commutant d'une matrice

Définition : Commutant d'une matrice carrée

Le **commutant** de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$.

Propriété

C'est un sous-espace vectoriel et même une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration

C'est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$, et stable par produit. $\square$

Méthode : Commutant d'une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que M commute avec A si et seulement si N commute avec D. C'est facile en passant par les endomorphismes !
2. On détermine directement $\mathscr{C}(D)$ en traduisant $DN = ND$. (Rappel : il est facile de multiplier à gauche ou à droite par une matrice diagonale !)
3. On en déduit $\mathscr{C}(A)$ qui est l'ensemble des PNP^{-1}.

Exemple

Toujours avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}0$, semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a, pour $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $DN = ND$ si et seulement si $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & 2c \\ -d & -e & 2f \\ -g & -h & 2i \end{pmatrix}$ si et seulement si $c = f = g = h = 0$ si et seulement si N de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

Alors $\mathscr{C}(A) = \left\{ P\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}P^{-1},\ a,b,c,d,i \in \mathbb{R} \right\}$. C'est un espace vectoriel de dimension 5.

c Racines carrées d'une matrice

Définition

Si $M, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est une racine carrée de A lorsque $M^2 = A$. On note $\mathscr{R}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A.

Remarques

R 1 – $\mathscr{R}(A) \subset \mathscr{C}(A)$: si M est une racine de A, alors A est un polynôme en M donc commute avec M.

R 2 – Cette fois, on n'a plus un sous-espace vectoriel en général.

Méthode : Racines carrées d'une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$

Même principe que pour le commutant.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que M racine carrée de A si et seulement si N racine carrée de D.
2. On détermine directement $\mathscr{R}(D)$ en traduisant $N \in \mathscr{C}(D)$ et $N^2 = D$.
3. On en déduit $\mathscr{R}(A)$ qui est l'ensemble des PNP^{-1}.

Exemple

Toujours avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}0$, semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\mathscr{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},\ a,b,c,d,i \in \mathbb{R} \right\}$.

$N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ racine de D ssi $\begin{pmatrix} a^2+bd & b(a+e) & 0 \\ d(a+e) & e^2+bd & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = D$

Mais si on a $a + e \neq 0$, alors $b = d = 0$ et $a^2 = -1$ ce qui n'est pas possible sur $\mathbb{R}$.

Donc N racine de D si et seulement si $e=-a$, $a^2+bd=-1$ et $j^2=2$.
$\mathscr{R}(A)=\left\{P\begin{pmatrix} s\sqrt{-1-bd} & b & 0 \\ d & -s\sqrt{-1-bd} & 0 \\ 0 & 0 & t\sqrt{2}\end{pmatrix}P^{-1};\ b,d\in\mathbb{R};\ bd\leqslant -1; s,t\in\{-1,1\}\right\}$.

d Suites récurrentes

Méthode : Terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène $u_{n+p}=\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i u_i$

1. On pose $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1}\end{pmatrix}$.
2. On se ramène à $X_{n+1}=AX_n$, ce qui donne pour tout n, $X_n=A^nX_0$.
3. On peut, en diagonalisant $A=PDP^{-1}$ (si possible), s'affranchir du calcul de P^{-1} puis de celui de A^n en posant $Y_n=P^{-1}X_n$, ce qui donne $X_n=PD^nY_0$.
4. On en déduit l'expression de u_n en fonction de n.

Exemple

Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+3}=-u_{n+2}-u_{n+1}-u_n$ en posant $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2}\end{pmatrix}$.

Remarque

Quel est le polynôme caractéristique pour l'ordre 2 : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$?

$X_{n+1}=\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1}\end{pmatrix}=AX_n.$

On calcule $\chi_A=X^2-aX-b$: équation/polynôme caractéristique.

IV TRIGONALISATION

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\neq 0$, $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u\in\mathscr{L}(E)$.

1 Définition

Définition : endomorphisme et matrice trigonalisable

- $u\in\mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\in\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$.
- $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T\in\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ tel que $A=PTP^{-1}$.

Propriété

A est trigonalisable si et seulement si n'importe quel endomorphisme qu'elle représente l'est.

Remarques

R1 – Être diagonalisable implique être trigonalisable. La réciproque est fausse !

R2 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ est stable par u. On parle de **drapeau** stable par u.

R3 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire inférieure.

Propriété : Caractérisation

u (respectivement A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration

$(\Longrightarrow)$ (Matriciellement) Si A est trigonalisable, on a P inversible et $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix}$ telle que $A=PTP^{-1}$.

Alors $\chi_A=\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_i)$ est scindé.

$(\Longleftarrow)$ (Géométriquement) **Méthode classique**

- Si $n=1$, il n'y a rien à faire.
- Si $n\geqslant 2$ et χ_u est scindé, il y a au moins une valeur propre $\lambda\in\mathbb{K}$. Soit $x\in E$ un vecteur propre associé. On complète la famille libre (x) en une base $\mathscr{B}=(x,e_2,\dots,e_n)$ de E.

  Dans cette base, la matrice de u est de la forme $A=\begin{pmatrix}\lambda & (*)\\ (0) & A_1\end{pmatrix}$ où $A_1\in\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

  Si $E_1=\mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_n)$ et $u_1\in\mathscr{L}(E_1)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_1=(e_2,\dots,e_n)$ de E_1 est A_1, alors, par un déterminant triangulaire par bloc, $\chi_A=(X-\lambda)\chi_{A_1}$.
  Donc χ_{A_1} est scindé. Il suffit donc de raisonner par récurrence : si on sait trigonaliser u_1 en dimension $n-1\geqslant 1$ pour n fixé, on a $P_1\in\mathscr{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ et T_1 triangulaire telle que $A_1=P_1T_1P_1^{-1}$.

  Alors $A=\begin{pmatrix}\lambda & (*)\\ (0) & P_1T_1P_1^{-1}\end{pmatrix}$.

  On pose $P=\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & P_1\end{pmatrix}$ et on vérifie que $\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & P_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & P_1^{-1}\end{pmatrix}=I_n$ donc P inversible d'inverse $\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & P_1^{-1}\end{pmatrix}$ et

  $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & P_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & (*)\\ (0) & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & (*)\\ (0) & T_1\end{pmatrix}\in\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. $\square$

Corollaire

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, tous les endomorphismes et toutes les matrices sont trigonalisables.

Remarque

Si u (respectivement A) est trigonalisable, comme le polynôme caractéristique est scindé, on a automatiquement que si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de de multiplicités respectives $m_1,\dots,m_p$, alors $\sum_{i=1}^{p}m_i\lambda_i=\mathrm{tr}\,u$ (ou $\mathrm{tr}\,A$) et $\prod_{i=1}^{p}\lambda_i^{m_i}=\det u$ (ou $\det A$). Cela saute d'ailleurs au yeux avec la matrice triangulaire !

2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3

On peut toujours mettre en application la démonstration par récurrence constructive.
Voici deux exemples particuliers.

Méthode : Trigonalisation en dimension 2

On suppose que $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, alors A admet une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ.
2. On complète en $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par exemple en piochant dans la base canonique).
3. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

On peut même se ramener à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en cherchant $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).

Méthode : Trigonalisation en dimension 3 avec deux valeurs propres

On suppose que $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, et que A admet une valeur propre double λ et une valeur propre simple μ.

Alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\mu(A) = 1$.

On montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à μ.
2. On cherche $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
3. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$ est un base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

Remarque

Il se peut aussi que A ait une valeur propre triple.

V POLYNÔMES D'ENDOMORPHISME ET DE MATRICES

1 Rappels

On a vu que si $u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit

- $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p$
- $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$
- $\Phi_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

- $\Phi_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Remarques

R 1 – Ne pas confondre le polynôme P, l'endomorphisme $P(u)$ et la matrice $P(A)$.
R 2 – $\big(P(u)\big)(x)$ existe mais pas $P\big(u(x)\big)$.
R 3 – Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
R 4 – Deux polynômes en u (respectivement A) commutent.

Notation

On note $\mathbb{K}[u] = \operatorname{Im} \Phi_u = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Im} \Phi_A = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Remarque

Ne pas dire « Soit $P(u) \in \mathbb{K}[u]$ » : il n'y a pas unicité en général (Φ_u n'est pas injective).
Préférer « Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(u)$... ».

Propriété

$\mathbb{K}[u] = \operatorname{Vect}(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Vect}(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-algèbres commutatives de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement.

Démonstration

Comme image de morphismes d'algèbres. □

2 Propriétés

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q$.

Propriété

Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors

(i) $P(D) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$

(ii) $P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

3 Polynômes annulateur

a Définition

Définition

P est un **polynôme annulateur** de u (respectivement A) lors $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exemples

E1 – Le polynôme nul.
E2 – Si p est une projection, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p.
E3 – Si s est une symétrie, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s.

Propriété

(i) Si E est de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de u.
(ii) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de A.

Démonstration

Si $n = \dim E$, $\left(\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n^2}\right)$ (respectivement $\left(I_n, A, \dots, A^{n^2}\right)$) est liée car $n^2 + 1$ vecteurs en dimension n^2. □

Méthode : Calcul de puissances à partir d'un polynôme annulateur

1. On cherche un polynôme annulateur non nul P de A.
2. Pour un polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$, on calcule le reste de la division euclidienne de S pour P : $S = PQ + R$ où $\deg R < \deg P$. C'est plutôt facile lorsque P est scindé simple (Interpolation de Lagrange).
3. On en déduit, entre autres, pour $k \in \mathbb{N}$, avec $S = X^k$, $A^k = R(A)$.

Exercice

Si $A^2 - 3A + 2I_n + 0$, calculer les puissances de A, vérifier que A est inversible et que exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n et vérifier que l'expression des puissances est valable pour des puissances négatives.

b Polynômes annulateurs et valeurs propres

Propriété

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)(x)$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)X = P(\lambda)X$.

Corollaire

Si λ est valeur propre de u (respectivement A), alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ (respectivement $P(A)$).

Propriété

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$), $\mathscr{Z}(P)$ l'ensemble des racines de P, alors $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathscr{Z}(P)$ (respectivement $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathscr{Z}(P)$).

L'inclusion est stricte en général.

Remarque

Les valeurs propres sont **parmi** les racines de P

Exemple

Si $p^2 = p$ alors $\operatorname{Sp} p \subset \{0,1\}$.

4 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème : Lemme de décomposition des noyaux

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \wedge Q = 1$. Alors $\operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Plus généralement, si $P_1, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, alors $\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{m} P_i\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_i(u))$.

Démonstration

On a $(PQ)(u)(x) = P(u)\big(Q(u)(x)\big) = Q(u)\big(P(u)(x)\big)$. Donc si $P(u)(x) = 0$ ou $Q(u)(x) = 0$, alors $(PQ)(u)(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(Q(u))$ sont des sous-espaces vectoriels de $\operatorname{Ker}((PQ)(u))$.

On a une relation de Bézout : $AP + BQ = 1$. Donc si $x \in \operatorname{Ker}(P(u)) \cap \operatorname{Ker}(Q(u))$, $x = A(u)\big(P(u)(x)\big) + B(u)\big(Q(u)(x)\big) = 0_E$ donc la somme est directe.

Puis tout $x \in \operatorname{Ker}((PQ)(u))$ s'écrit $x = y + z$ avec $y = A(u)\big(P(u)(x)\big)$ et $z = B(u)\big(Q(u)(x)\big)$, et alors $Q(u)(y) = (QAP)(u)(x) = U(u)\big((PQ)(u)(x)\big) = A(u)(0_E) = 0_E$ et $P(u)(z) = (PBQ)(u)(x) = B(u)\big((PQ)(u)(x)\big) = B(u)(0_E) = 0_E$ donc $\operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) + \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Reste à poser une récurrence, ce qui se fait sans trop de problème en remarquant que si $P_1, \dots, P_{n+1}$ sont premiers entre eux deux à deux, alors $P_1 \cdots P_{n+1} = (P_1 \cdots P_n) P_{n+1}$ avec $(P_1 \cdots P_n) \wedge P_{n+1} = 1$. □

Exercice

Résoudre $y^{(4)} = y$, $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, u opérateur de dérivation.
On cherche donc $\operatorname{Ker}\big((X^4 - 1)(u)\big)$ avec $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)\big(X^2+1\big)$.
Les solutions sont les $x \mapsto Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x$ pour $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Corollaire

(i) Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Ker}(P(u))$ est stable par u.

(ii) Si $P_1, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$ est un polynôme annulateur de u, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_i(u))$, la matrice dans une base adaptée est diagonale par blocs.

Propriété : Caractérisation 6

Si E est de dimension fini et $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.
(s'adapte aux matrices)

Démonstration

$\Longrightarrow$ Si u est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\big((X-\lambda_i)(u)\big) = \mathrm{Ker}\left(\prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)(u)\right)$ donc $P = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$ est un polynôme annulateur scindé simple de u.

Ou alors u est représenté par $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$ (où chaque valeur propre λ_i apparaît m_{λ_i} fois) et alors $P(u)$ représenté par $\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_m) \end{pmatrix} = 0_n$.

$\Longleftarrow$ Si $P = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$ est un polynôme annulateur scindé simple de u, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\big((X-\lambda_i)(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u)$ et u est bien diagonalisable.

$\square$

5 Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Propriété

Si u est diagonalisable, F stable par u et u_F l'endomorphisme induit, alors u_F est diagonalisable.

Démonstration

Tout polynôme annulateur de u est un polynôme annulateur de u_F. $\square$

On a déjà vu que les droites stables par u étaient exactement les droites engendrées par un vecteur propre.

Méthode : Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Le théorème suivant est hors-programme : il faut le redémontrer lorsqu'on en a besoin.

Théorème

Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.
Un sous-espace non nul F de E est stable par u si et seulement s'il existe une base de F formée de vecteurs propres de u.

En effet, si on a une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F formée de vecteurs propres, les images de chacun des vecteurs sont encore dans F et F est bien stable par u.

Si, réciproquement, F est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_F induit par u sur F. Comme u est diagonalisable, u_F l'est aussi et on a une base de F formée de vecteurs propres de u_F donc de u.

On peut donc déterminer des sous-espaces stables soit nuls, soit ayant une base construite à partir de vecteurs propres.

Exercice

Déterminer les sous-espaces stables par l'application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On commence par diagonaliser A : $\mathrm{Sp}\, A = \{1, -3\}$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$, $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, donc u est bien diagonalisable.

Notons $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (0,1,-2)$ et $e_3 = (1,1,0)$ et classons les sous-espaces stables par dimensions :

- $\{(0,0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont comme toujours stables par u.
- Les droites stables par u sont les droites
  - ⋆ $D(\alpha,\beta) = \mathbb{R}(\alpha e_1 + \beta e_2)$ pour $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ contenues dans $E_1(A)$.
    Pour éviter les redondances, on peut par exemple considérer
    - $D(1,0) = \mathbb{R}e_1 = \mathbb{R}(1,0,1)$ d'équations $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$
    - et les droites $D(\alpha,1) = \mathbb{R}(\alpha,1,\alpha-2)$ d'équations $\begin{cases} x = \alpha y \\ z = (\alpha-2)y \end{cases}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ $D' = \mathbb{R}(1,1,0) = E_{-3}(A)$ d'équations $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$
- Les plans stables par u sont des plans engendrés par des vecteurs propres : il s'agit donc
  - ⋆ $P_1 = E_1(A) = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ d'équation $z = x - 2y$.
  - ⋆ $P(\alpha,\beta) = \mathrm{Vect}(\alpha e_1 + \beta e_2, e_3)$ pour $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.
    De nouveau, on peut éviter les redondances en considérant
    - $P(1,0) = \mathrm{Vect}(e_1,e_3)$ d'équation $x = y + z$
    - pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $P(\alpha,1) = \mathrm{Vect}(\alpha e_1 + e_2, e_3)$ d'équation $(\alpha-2)(x-y) = (\alpha-1)z$.

6 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème : de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Exemple

Si $n = 2$, $A^2 = (\mathrm{tr}\,A)A - (\det A)I_n$.

Démonstration

(Non exigible) Soit $x \neq 0_E$. On veut montrer que $\chi_u(u)(x) = 0_E$.

1. On s'intéresse au plus petit sous-espaces vectoriel de E stable par u contenant x. Il contient nécessairement tous les $u^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Comme on est en dimension finie, on finit par avoir $u^k(x) \in \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)\right)$.
   Soit $d = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ u^k(x) \in \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)\right)\right\}$.
   Alors $u^d(x) \in \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\right)$ et $\left(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\right)$ est libre (sinon, l'un s'exprimerait comme combinaison linéaire des précédents ce qui contredit la minimalité).
   De plus, $F = \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\right)$ est stable par u.
2. On cherche χ_{u_F}.
   En écrivant $u^d(x) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique s'obtient facilement en développant par rapport à la dernière colonne : $\chi_{u_F} = X^n - a_{d-1}X^{d-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ (cf TD, matrice compagnon).
   Alors $\chi_{u_F}(u_F)(x) = \chi_{u_F}(u)(x) = 0_E$. Or χ_{u_F} divise χ_u : $\chi_u = Q \times \chi_{u_F}$ donc $\chi_u(u)(x) = Q(u) \circ \chi_{u_F}(u)(x) = \big(Q(u)\big)(0_E) = 0_E$.
   Finalement, $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. □

7 Polynôme minimal

On suppose E de dimension finie n.

Propriété

*L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$ appelé **idéal annulateur** de u (respectivement A).*

Démonstration

C'est le noyau du morphisme d'anneau $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathscr{L}(E)$. □

Définition : Polynôme minimal

On appelle polynôme minimal de u (respectivement de A) l'unique générateur unitaire de cet idéal. On le notera μ_u (respectivement μ_A).

Remarques

- **R 1 –** Pas de notation officiel, on le note parfois π_u ou π_A.
- **R 2 –** La définition est licite car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.
- **R 3 –** $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\} = (\mu_u) = \mu_u \mathbb{K}[X]$: μ_u est donc le polynôme annulateur unitaire non nul de degré minimal.
- **R 4 –** $P(u) = 0$ si et seulement si μ_u divise P.
- **R 5 –** Si $P(u) = 0$ et $\deg P < \deg \mu_u$, alors $P = 0$.

Propriété

Si A est une matrice représentant l'endomorphisme u, alors $\mu_u = \mu_A$.

Démonstration

u et A ont même idéal annulateur. □

Propriété

Si $d = \deg \mu_u$ (respectivement $d = \deg \mu_A$), alors $\left(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ (respectivement $\left(I_n, A, \ldots, A^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[A]$).

Démonstration

Le caractère libre vient de la minimalité, le caractère générateur vient de la division euclidienne. □

Propriété

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. En particulier, il est de degré au plus n.

Démonstration

Conséquence de Cayley-Hamilton □

Propriété

*Les racines du polynôme minimal sont **exactement** les valeurs propres.*

Démonstration

Comme μ_u est un polynôme annulateur, on sait déjà que $\operatorname{Sp} u \subset \mathcal{Z}(u)$.

Réciproquement, comme μ_u divise χ_u d'après le théorème de Cayley-Hamilton, les racines de μ_u sont bien des valeurs propres.

On peut aussi le voir sans : si λ racine de μ_u, alors $\mu_u = (X-\lambda)Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, donc $\mu(u) = 0_{\mathscr{L}(E)} = (u - \lambda \operatorname{id}_E) \circ Q(u)$. Si λ n'était pas valeur propre, alors $u - \lambda \operatorname{id}_E$ serait un isomorphisme et $Q(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui contredit la minimalité. □

Remarques

R 1 – Donc $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X-\lambda)$ divise μ_u qui divise χ_u.

R 2 – π_u et μ_u ont les mêmes racines mais pas nécessairement les mêmes multiplicités.
Exemple : avec $\chi_{I_n} = (X-1)^n$ et $\mu_{I_n} = X - 1$.

R 3 – Si χ_u est scindé simple, alors $\mu_u = \chi_u$.
La réciproque est fausse : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2$ donc $\mu_A \in \{X, X^2\}$ et comme $A \neq 0_2$, $\mu_A = X^2 = \chi_A$.

Propriété : Caractérisation 7

u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple si et seulement si $\mu_u = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X-\lambda)$.

(Idem avec les matrices)

Démonstration

On a déjà vu qu'être annulé par un polynôme scindé simple rendait diagonalisable.

Si, réciproquement, u est diagonalisable, alors le lemme des décomposition des noyaux avait permis de montrer que $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de u, est un polynôme annulateur de u. Donc il divise μ_u. Or les λ_i sont les racines de μ_u qui est unitaire, donc $\mu_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ qui est scindé simple. □

Propriété

Si F est stable par u, u_F l'endomorphisme induit, alors μ_{u_F} divise μ_u.

Démonstration

Comme $\mu_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $\mu_u(u_F) = 0_{\mathscr{L}(F)}$ et donc $\mu_{u_F} | \mu_u$. □

Propriété

u est trigonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Démonstration

En effet, si u est trigonalisable, χ_u est scindé et c'est un polynôme annulateur d'après Cayley-Hamilton.

Si, réciproquement, P est un polynôme annulateur scindé, A matrice de u dans une base $\mathscr{B}$, μ_A divise P donc a au moins une racine donc $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} u \neq \varnothing$.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, x vecteur propre associé que l'on complète en une base de E, ce qui permet de voir que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}$.

Alors $P(A') = \begin{pmatrix} P(\lambda) & (*) \\ (0) & P(A_1) \end{pmatrix} = 0_n$ donc P annule A_1 et on termine par récurrence sur n comme dans la caractérisation avec le polynôme caractéristique scindé. □

VI ENDOMORPHISMES ET MATRICES NILPOTENTES

1 Définition

Définition : Endomorphisme et matrice nilpotents et indice de nilpotence

$u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $A^p = 0_n$).

Le plus petit $p \geqslant 1$ vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence**.

Remarque

u est nilpotent si et seulement si n'importe quelle matrice qui le représente l'est.

Exemples

E 1 – L'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ de dérivation est nilpotent d'indice $n+1$.

E 2 – $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice n.

E 3 – Plus généralement, une matrice triangulaire stricte est nilpotente d'indice au plus n.

2 Propriétés

Propriété : Caractérisation

u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable et $\operatorname{Sp} u = \{0\}$.
Idem avec des matrices.

Démonstration

Si u est nilpotent, il possède un polynôme annulateur X^p scindé, donc il est trigonalisable et la seule valeur propre possible est la seule racine de ce polynôme : 0.

Si u est trigonalisable et n'a que 0 comme valeur propre, il est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte, donc il est nilpotent. □

Remarque

En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est presque jamais diagonalisable !

Propriété

L'indice de nilpotence est toujours majoré par $n = \dim E$.

Démonstration

Vu la propriété précédente, le polynôme caractéristique est X^n et c'est un polynôme annulateur. □

3 Trigonalisation d'un endomorphisme à polynôme minimal scindé

Théorème

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et P polynôme annulateur scindé de u.

Alors on peut trouver des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ de E, stables par u, supplémentaires dans E, tels que sur chaque F_k, l'endomorphisme u_k induit par u soit la soit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent ($u_k = a_k \mathrm{id}_{F_k} + n_k$).

Démonstration

$P = \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{p_k}$. On pose $P_k = (X - a_k)^{p_k}$.

Alors les P_k sont deux à deux premiers entre eux, et si $F_k = \mathrm{Ker}\left(u - a_k \mathrm{id}_E\right)^{p_k}$, alors, F_k stable par u et d'après le lemme de décomposition des noyaux, $E = \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$.

Pour chaque k, on pose $n_k = u_k - a_k \mathrm{id}_{F_k} \in \mathscr{L}(F_k)$ et alors $n_k^{p_k} = 0_{\mathscr{L}(F_k)}$, ce qui termine la démonstration. □

Remarques

R 1 – Les F_k de dimension 0 n'ont pas d'intérêt (cas où a_k n'est pas valeur propre de u).

R 2 – Dans une base adaptée à la décomposition, si $p_k = \dim F_k$, on a donc que u est représenté par $\begin{pmatrix} a_1 I_{p_1} + N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_r I_{p_r} + N_r \end{pmatrix}$ où les N_k sont nilpotentes ce qui permet, en choisissant une base dans laquelle les N_k sont triangulaires supérieures de retrouver le fait que les a_k pour lesquels $p_k \neq 0$ sont les valeurs propres de u et que u est trigonalisable.

On a dans ce cas que $\chi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{p_k}$ donc pour tout k, $p_k = m_k$ est la multiplicité de a_k en tant que valeur propre (éventuelle) de u.

R 3 – Comme u est trigonalisable, χ_u est scindé, donc en appliquant ce résultat à $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$, on obtient que pour tout k, $\dim F_k = m_k$ où $F_k = \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k \mathrm{id}_E\right)^{m_k}$ appelé sous-espace caractéristique de u associé à λ_k. Les sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires dans E.

Corollaire

Si u est trigonalisable, on peut trouver d diagonalisable et n nilpotent tels que $u = d + n$ et $nd = dn$.

Remarques

R 1 – On peut même montrer que d et n sont uniques et sont des polynômes en u. On parle de décomposition de Dunford.

R 2 – C'est très intéressant pour calculer les puissances de u.