FONCTIONS VECTORIELLES : INTÉGRATION SUR UN SEGMENT, ARCS PARAMÉTRÉS

1. Calculs de primitives et d'intégrales

1 Déterminer les primitives de fonctions données par les expressions suivantes, en précisant les intervalles de validité :

1. $(t+1)\operatorname{ch} t$
2. $t\sin^3 t$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$
4. $\dfrac{\ln t}{t+t\ln^2 t}$
5. $\dfrac{t^5}{1+t^{12}}$
6. $\dfrac{1}{t(t^2-1)}$
7. $\dfrac{1}{t^2\pm 2t+2}$
8. $\dfrac{t^4+1}{t^4-1}$
9. $\dfrac{1}{e^t+1}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$
11. $\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 t}$
12. $\dfrac{1}{\cos^3 t}$
13. $\dfrac{t}{1+\sqrt{t+1}}$
14. $\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$
15. $\dfrac{t+1}{\sqrt{2-t^2}}$
16. $\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}$
17. $\dfrac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}$
18. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{1+\operatorname{ch}^2 t}$
19. $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$
20. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}$

2 Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\sin t\cos t}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{Arctan} t}{(t+1)^2}\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{t^3+1}\,dt$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$

2. Manipulations d'intégrales

3 Soit $f\in\mathscr{C}([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

4 Soit $f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $a<b$. À quelle condition a-t-on $\left|\displaystyle\int_a^b f\right|=\displaystyle\int_a^b |f|$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$? si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

Dans le cas complexe, on pourra écrire $\int_a^b f=\left|\int_a^b f\right|e^{i\theta}$...

5 Soit $f : [0,+\infty[\to[0,+\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la limite en $+\infty$ de $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.

6 **Généralisation de l'IPP**

Si B bilinéaire et $u\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, $v\in\mathscr{C}^1(I,E)$, montrer que

$$\forall a,b\in I,\ \int_a^b B(u(t),v'(t))\,dt=[B(u(t),v(t))]_a^b-\int_a^b B(u'(t),v(t))\,dt.$$

7 Montrer que $(I_n)_n=\left(\displaystyle\int_0^1\frac{du}{1+u^n}\right)_n$ converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $I_n-\ell$.

8 **Intégrales de Wallis**

On pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$ et $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$.

1. Comparer I_n et J_n.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n).
3. En déduire une expression de I_n.
4. Étudier la monotonie de (I_n).
5. Que dire de la suite (nI_nI_{n-1}) ?
6. Montrer que $I_{n-2}\sim I_n$ puis que $I_{n-1}\sim I_n$.
7. En déduire un équivalent de I_n.

9 **Lemme de Grönwall**

Soient $f,g\in\mathscr{C}([0,+\infty[)$ telles que $f,g\geqslant 0$ et $C>0$. On suppose que

$$\forall x\geqslant 0,\ \ f(x)\leqslant C+\int_0^x f(t)g(t)\,dt.$$

Montrer que $\forall x\geqslant 0,\ \ f(x)\leqslant Ce^{\int_0^x g(t)\,dt}$.

3. Intégrale dépendant des bornes

10 **CCINP 56** On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

11 Pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, on pose $I(x)=\displaystyle\int_{1/x}^x\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$. Calculer $I(x)$ pour $x>0$ de trois manières différentes :

1. Changement de variable $t=\dfrac{1}{u}$ 2. Intégration par parties. 3. Étude de la fonction I.

12 Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa parité.
2. Justifier que f et dérivable et calculer f'.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de f et la branche infinie correspondante.
5. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et retrouver le résultat de la question précédente.
6. Effectuer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
7. Tracer le graphe de f.

4. Sommes de Riemann

13 Étudier convergence et limite des suites de terme général

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \cos\frac{k\pi}{n}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ 5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}$ 6. $\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

14 Déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$.

15 On désigne par z un nombre complexe de module différent de 1 ; on pose pour tout entier naturel k, $I_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer, pour k entier naturel non nul, $I_k - zI_{k-1}$.
2. Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I_k pour tout k.
   Remarque : on pourrait calculer cette intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de celui-ci et en séparant partie réelle et partie imaginaire... mais ce serait certainement laborieux !
4. Faire dans I_1 le « changement de variable » $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Qu'en penser ?

16 Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

5. Formules de Taylor

17 Soit $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\forall\, h > 0,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ |f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.
2. En déduire que f' est bornée, et, en notant $M_1 = \|f'\|_\infty$, $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

18 Soit $(a,b) \in R^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Justifier l'existence de $M = \sup_{[a,b]} |f''|$.
2. Soit $x \in [a,b]$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[x,a]$, puis sur $[x,b]$, montrer que $|f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(b-x)(x-a)$.
3. En déduire que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{M(b-a)^3}{12}$.

19 Soit $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a-r, a+r] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$.

Calculer la limite de $\dfrac{1}{h^3}\big(f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)\big)$ lorsque $h \to 0$.

6. Arcs paramétrés

20 **Astroïde**

1. Étudier la courbe définie paramétriquement par $x(t) = \cos^3 t$ et $y(t) = \sin^3 t$.
   (Réduire le domaine d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).
   On admet qu'en un point singulier, la pente de la tangente est donnée par la limite éventuelle du taux d'accroissement $\dfrac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}$.
2. On note $\mathrm{A}(t)$ et $\mathrm{B}(t)$, pour $t \not\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, les points d'intersection de la tangente à la courbe au point de paramètre t avec les deux axes. Calculer la distance $\mathrm{A}(t)\mathrm{B}(t)$.

Remarque : il s'agit de la trajectoire d'un point d'un cercle de rayon $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon 1.

21 **Lemniscate de Bernoulli**

1. Étudier la courbe définie paramétriquement par $x(t) = \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}$ et $y(t) = \dfrac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t}$.
   (Réduire le domaine d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).
2. Soient $\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et $\mathrm{F}'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ appelés pôle de la lemniscate. Montrer que pour tout point M de la courbe, $\mathrm{MF} \times \mathrm{MF}' = \dfrac{1}{2}$.