FONCTIONS VECTORIELLES : DÉRIVABILITÉ

- Le théorème de Rolle est d'usage courant mais seulement valable pour les fonctions à valeurs réelles. Il existe des extensions en ouvrant des bornes et en remplaçant les valeurs par les limites (voir exercice 4).
- De même, le théorème des accroissements finis n'est plus valable si la fonction n'est pas à valeurs réelles. Mais l'inégalité est valable dans un cadre beaucoup plus large. Par contre il faut alors se limiter à des majorations.
- Le théorème « de la dérivée » est un théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. Mais attention : on ne prolonge pas une dérivée, on prolonge la fonction et on obtient sa dérivabilité au point.
- Un développement limité à l'ordre 1 donne la dérivabilité (et la dérivée) en un point. Ce n'est plus vrai à partir de l'ordre 2.

Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Si f est dérivable à valeur dans E de dimension finie, $\|f\|$ est dérivable en tout point tel que $f(x) \neq 0$.
3. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.
4. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a) = f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

1 CCINP 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

2 CCINP 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

3

Soit E espace euclidien, $\|\|$ la norme euclidienne associée. Si f définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E deux fois dérivable sur I telle que $\|f\|$ soit constante, montrer que le produit scalaire $\left(f(t)\middle|f''(t)\right)$ est toujours négatif.

Interprétation géométrique ?

4 Très classique

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé simple.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.
5. Avec les mêmes hypothèses montrer que plus généralement, si $(a,b) \neq (0,0)$, $aP + bP'$ est scindé.

5

Montrer que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

6 Généralisations du théorème de Rolle

1. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

7 Dérivées successives d'arctangente

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{Arctan}^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale scindée simple.

8 Théorème de Darboux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.

9

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $|f'| \leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(t)}\right) \end{array}\right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

10 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit P_n polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ aux points $(x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$.

1. Montrer que

$$\forall x \in [a,b],\ \ \exists \xi_x \in [a,b],\ \ f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Indication : s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.

2. En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f) = \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$ et $T(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$,

$$\left\| f - P_n \right\|_\infty \leqslant \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!} \| T \|_\infty .$$

11 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit $f$de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a, b \in I$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

12

Le but de l'exercice est de construire des fonction « plateau » de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.

1. On définit, si $x > 0$, $\phi(x) = \exp(-1/x)$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée k^{e} est de la forme $x \mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$ où P_k polynomiale.
   On prolonge ϕ à $\mathbb{R}$ en définissant, si $x \leqslant 0$, $\phi(x) = 0$.
   Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de $x \mapsto \phi(x+2)\phi(-1-x)$ puis de son unique primitive qui tends vers 0 en $-\infty$.
3. Construire ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$.
4. Si $a < b < c < d$, comment construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$?