Fonctions vectorielles : dérivabilité

- Le théorème de Rolle est d'usage courant mais seulement valable pour les fonctions à valeurs réelles. Il existe des extensions en ouvrant des bornes et en remplaçant les valeurs par les limites (voir exercice 4).
- De même, le théorème des accroissements finis n'est plus valable si la fonction n'est pas à valeurs réelles. Mais l'inégalité est valable dans un cadre beaucoup plus large. Par contre il faut alors se limiter à des majorations.
- Le théorème « de la dérivée » est un théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. Mais attention : on ne prolonge pas une dérivée, on prolonge la fonction et on obtient sa dérivabilité au point.
- Un développement limité à l'ordre 1 donne la dérivabilité (et la dérivée) en un point. Ce n'est plus vrai à partir de l'ordre 2.

Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Si f est dérivable à valeur dans E de dimension finie, $\|f\|$ est dérivable en tout point tel que $f(x) \neq 0$.
3. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
4. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a) = f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

1 CCINP 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

2 CCINP 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

3

Soit E espace euclidien, $\|\|$ la norme euclidienne associée. Si f définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E deux fois dérivable sur I telle que $\|f\|$ soit constante, montrer que le produit scalaire $\left(f(t)\middle|f''(t)\right)$ est toujours négatif.

Interprétation géométrique ?

4 Très classique (jusqu'à 4.)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé simple.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.
5. Avec les mêmes hypothèses montrer que plus généralement, si $(a,b) \neq (0,0)$, $aP + bP'$ est scindé.

5

Montrer que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

6 Généralisations du théorème de Rolle

1. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

7 Dérivées successives d'arctangente

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{Arctan}^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale scindée simple.

8 Théorème de Darboux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.

9

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $\left|f'\right| \leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(t)}\right) \end{array}\right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

10 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit P_n polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ aux points $(x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$.

1. Montrer que
$$\forall\, x \in [a,b],\ \ \exists \xi_x \in [a,b],\ \ f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$
Indication : s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.
2. En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f) = \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$ et $T(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$,
$$\left\| f - P_n \right\|_\infty \leqslant \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!} \|T\|_\infty.$$

11 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit $f$de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a, b \in I$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

12

Le but de l'exercice est de construire des fonction « plateau » de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.

1. On définit, si $x > 0$, $\phi(x) = \exp(-1/x)$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée k^{e} est de la forme $x \mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$ où P_k polynomiale.
On prolonge ϕ à $\mathbb{R}$ en définissant, si $x \leqslant 0$, $\phi(x) = 0$.
Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de $x \mapsto \phi(x+2)\phi(-1-x)$ puis de son unique primitive qui tends vers 0 en $-\infty$.
3. Construire ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$.
4. Si $a < b < c < d$, comment construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$?

Solution de 1 : CCINP 3

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
On prouve, par récurrence, que :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
$f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}$.
3. Notons (P_n) la propriété :
Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
$\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

   Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.

   La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.

   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

   Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et
$$\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

   En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient
$$\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

   C'est-à-dire $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$ avec $\dbinom{n}{-1} = \dbinom{n}{n+1} = 0$.

   Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1} = \dbinom{n+1}{k}$.

   On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
Donc (P_{n+1}) est vraie.

Solution de 2 : CCINP 4

1. Théorème des accroissements finis :
   Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
   Alors $\exists\, c \in\,]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.
2. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.
   Soit $h \neq 0$ tel que $x_0+h \in [a,b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et x_0+h, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et x_0+h tel que $f(x_0+h)-f(x_0) = f'(c_h)h$.
   Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$.
   Donc $\dfrac{1}{h}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big) = f'(c_h) \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x) = \ell$.
   On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

3. La fonction g proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
   g est également dérivable en 0 car $\dfrac{1}{h}\big(g(h)-g(0)\big) = h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$.
   Or $h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ car $\left|h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)\right| \leqslant |h|$. Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
   Cependant, $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (car $\left|2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant 2|x|$), mais $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
   Donc g' n'a pas de limite en 0.

Solution de 3 :

$g : t \mapsto \|f(t)\|^2 = \big(f(t)\big|f(t)\big)$ est deux fois dérivable par opérations, le produit scalaire étant bilinéaire et est constant, donc en dérivant, par symétrie du produit scalaire, pour tout $t \in I$, $g'(t) = 2\big(f(t)\big|f'(t)\big) = 0$, puis en redérivant, $g''(t) = 2\big(f(t)\big|f''(t)\big) + 2\|f'(t)\|^2 = 0$ et donc $\big(f(t)\big|f''(t)\big) = -\|f'(t)\|^2 \leqslant 0$.

Interprétation : un mouvement sur une sphère a une accélération orientée vers l'intérieur de la sphère.

Solution de 4 : Très classique (jusqu'à 4.)

5. Le résultat est immédiat si $a=0$ ou $b=0$. On suppose donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $b=1$ (quitte à tout diviser par b).

Si P est scindé, il s'écrit $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)^{m_k}$ avec $x_1 < \cdots < x_n$ et comme dans la question précédente, chaque x_k est racine de P' de multiplicité m_k-1, ce qui donne $\deg P - n$ racines de $aP+P'$ comptées avec multiplicité. Il en manque encore n.

L'idée astucieuse est de considérer $f : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{ax}$ qui se dérive en $f' : x \mapsto (P'(x)+aP(x))\mathrm{e}^{ax}$ possédant les mêmes zéros que $P'+aP$.

Or f s'annule en tous les x_k et possède une limite nulle soit en $+\infty$, soit en $-\infty$. En appliquant n fois le théorème de Rolle (éventuellement généralisé), on obtient n zéros distincts et distincts des x_k de f' donc les n racines qu'il nous manquait de $P'+aP$ qui est bien scindé.

Solution de 8 : Théorème de Darboux

1. On suppose, sans perte de généralités, que $f(a) > 0$ et $f(a) < 0$. On aimerait adapter la preuve du théorème de Rolle en distant que le maximum que f atteint en étant continue sur le segment $[a,b]$ est atteint dans $]a,b[$ mais on ne peut pas le dire directement car f' n'est pas supposée continue donc on ne peut pas conclure de l'hypothèse car f est strictement croissante au voisinage de a et strictement décroissante au voisinage de b.
   Cependant, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} f'(a) > 0$ donc au voisinage de a, $f(x)-f(a) > 0$ soit $f(x) > f(a)$ et de même, au voisinage de b, $f(x) > f(b)$ ce qui assure que ce maximum est atteint dans $]a,b[$. La condition nécessaire d'extremum local permet bien de conclure.
2. Si, plus généralement, f dérivable sur I, $a, b \in I$ distincts et m tel que $f'(a) < m < f'(b)$, alors $g = f - m\,\mathrm{id}$ est dérivable sur $[a,b]$ et la première question nous dit que g' s'annule donc que m est atteinte par f' sur $]a,b[$.

Solution de 10 : Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit $x \in [a,b]$, distinct des x_i (sinon, c'est immédiat, tous les ξ_x conviennent.).

Soit $\varphi :\ t \mapsto f(t) - P_n(t) - KT(t)$ où K est tel que $\varphi(x) = 0$ (ce qui est possible car $T(x) \neq 0$ car x n'est pas l'un des x_i.)

On a alors que φ est nulle en x et en tous les x_i, soit en $n+2$ points. Comme les fonctions qui la composent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, φ est continue sur les segments et dérivables sur les $n+1$ intervalles ouverts successifs d'extrémités ces points, ce qui nous donne $n+1$ zéros distincts (dans $]a,b[$) de φ' en appliquant $n+1$ fois le théorème de Rolle.

En réitérant ce procédé à φ', puis φ'', *etc* jusqu'à $\varphi^{(n)}$, ce qui est possible car f donc φ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on obtient par récurrence que pour tout $j \in [\![0,n+1]\!]$, φ^j admet $n+2-j$ zéros distincts (dans $]0,n[$). En particulier, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en un $\xi_x \in]a,b[$.

Or $\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - P_n^{(n+1)} - KT^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)} - K(n+1)!$ car P_n est de degré au plus n et T est unitaire de degré $n+1$.

On a donc finalement que $K = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ et donc $\boxed{f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}T(x).}$

Solution de 11 : Égalité de Taylor-Lagrange

Poser $\varphi(x) = f(b) - \left(f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + A(b-x)^{n+1}\right)$ avec A tel que $\varphi(a) = 0$ et appliquer le théorème de Rolle puis conclure.

Ou bien poser $\varphi(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + A(x-a)^{n+1}\right)$ avec A tel que $\varphi(b) = 0$ et soit appliquer le théorème de Rolle puis une hypothèse de récurrence, soit n fois le théorème de Rolle.