Limites et continuité

- Pour montrer que $f: A\subset E\to\mathbb{R}$ tend vers ℓ, on pourra essayer de majorer la norme de la différence par une quantité tendant vers 0.
- Pour montrer qu'il n'y a pas de limite, penser au critère séquentiel.
- Pour la continuité, et en particulier les prolongements, on peut utiliser le lemme facile :

$$\text{si } f:\ D\mapsto\mathbb{R} \text{ où } D=D_1\cup D_2\subset E \text{ et } a\in\overline{D_1}\cap\overline{D_2}, \text{ alors}$$
$$f\xrightarrow[x\to a]{}\ell \text{ si et seulement si } f_{|D_1}\xrightarrow[x\to a]{}\ell \text{ et } f_{|D_2}\xrightarrow[x\to a]{}\ell,$$

et donc en particulier

$$f \text{ est continue en } a\in D \text{ tel que } a\in D_1 \text{ et } a\in\overline{D_2}$$
$$\text{si et seulement si } f_{|D_1} \text{ est continue en } a \text{ et } f_{|D_2}\xrightarrow[x\to a]{} f(a).$$

Vrai ou faux

1. S'il existe une suite (u_n) convergeant vers a telle que $f(u_n)\to\ell$, alors f admet ℓ comme limite en a.
2. Pour que $f: A\subset\mathbb{R}^2\to F$ admette une limite en $(0,0)$, il suffit que les applications partielles $x\mapsto f(x,0)$ et $y\mapsto f(0,y)$ convergent vers la même limite.
3. Toute application continue est uniformément continue.
4. Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
5. Une application linéaire est toujours continue.

1. Limites et continuité

1 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R},\quad f(x+y)=f(x)+f(y).$$

2 Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R},\quad f(x+y)=f(x)+f(y)\ \text{ et }\ f(xy)=f(x)f(y).$$

3 Un coureur parcourt 42 km en 4 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 heures pendant lequel il parcourt exactement 21 km.

L'exercice suivant permet de généraliser (ou non) ce type de raisonnement.

4 **Théorème de la corde universelle de Paul Lévy**

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$.

1. En utilisant $f\left(\frac{k}{n}\right)$, montrer que pour tout $n\geqslant 2$, il existe $x_n\in[0,1]$ tel que $f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.
2. En considérant sur $[0,1]$, la fonction $f: x\mapsto \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right)-x\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$ où $T>0$, montrer qu'on peut avoir $f(0)=f(1)$ sans qu'il existe de x tel que $f(x)=f(x+T)$.

5 Soit $[a,b]$ un segment stable par f continue. Montrer que f admet un point fixe dans $[a,b]$.

6 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Calculer les limites éventuelles en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$f:\ (x,y)\mapsto\frac{xy}{x+y}\qquad h:\ (x,y)\mapsto\frac{1-\cos(xy)}{y^2}\qquad j:\ (x,y)\mapsto\frac{\sin x-\sin y}{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y}$$
$$g:\ (x,y)\mapsto\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\qquad i:\ (x,y)\mapsto\frac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y}\qquad k:\ (x,y)\mapsto\frac{\sin x-\operatorname{sh}y}{\operatorname{sh}x-\sin y}$$

7 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier les prolongements par continuité des fonctions suivantes

$$f:\ (x,y)\mapsto\frac{\cos x-\cos y}{x-y}\qquad g:\ (x,y)\mapsto\frac{x^2+y^2}{x}$$

8 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f:\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\qquad h:\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4-2x^3y+x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x\neq y,\\ |x| & \text{sinon.}\end{cases}$$
$$g:\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 1+x^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

9 Soit $f:\ \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Continuité des applications linéaires

10 CCINP 36

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.Démontrer que φ est linéaire et continue.

11

On note $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application Δ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. On pose $M = \sup\limits_{u\in\ell^\infty(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \dfrac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}$. Justifier l'existence de M et le calculer.

12

Soit u l'application de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u(f) = f(1)$.

1. Démontrer que u n'est pas continue si l'on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_1.
2. L'application u est-elle continue si l'on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_∞ ?

3. Continuité et topologie

13 CCINP 35

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.

   P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

14 CCINP 41

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

15 Topologie matricielle

1. Montrer de deux manières différentes que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En déduire que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Démontrer de deux manière différentes que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Pour l'une d'entre elles, on pourra s'intéresser aux matrices telles que $\|A\| < 1$ où $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative et utiliser des séries.
3. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices symétriques sont fermés.
4. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{O}(n)$ des matrices orthogonales est fermé.
5. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.
6. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est-il dense ?
   On pourra considérer l'application qui à une matrice 2×2 associe le discriminant de son polynôme caractéristique.
7. Montrer que l'ensemble des matrice de rang $p \in [\![1, n-1]\!]$ n'est ni ouvert ni fermé. Étudier les cas $p = 0$ et $p = n$.

16

Montrer que l'application qui à $M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ associe son inverse est continue.

17 Caractérisations de la continuité

Soit $f : E \to F$ où E, F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est continue.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.
3. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.
4. Pour toute partie A de E, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
5. Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.
6. Pour toute partie C de F, $\mathrm{Fr}\left(f^{-1}(C)\right) \subset f^{-1}(\mathrm{Fr}(C))$.

18 **Autour de la distance à une partie** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Pour A partie de non vide de E et $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

1. Rappeler pourquoi $d(x, A)$ est bien définie et $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
2. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \left\{x \in E,\ d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$.
   (a) Montrer que A_n est ouvert.
   (b) Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \overline{A}$.
   (c) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable (ie indexée par des entiers) d'ouverts.
   (d) Montrer que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.
4. **Cas où la distance à un fermé est convexe**
   On suppose que F est une partie non vide fermée de E et que $x \mapsto d(x, F)$ est convexe, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$, $d(tx + (1-t)y, F) \leqslant t d(x, F) + (1-t) d(y, F)$.
   Prouver que F est convexe.
5. **Tout espace vectoriel normé est séparé et normal** On suppose que F_1 et F_2 sont des fermés non vides disjoints de E.
   (a) E est **séparé** [1] : c'est le cas où F_1 et F_2 sont des singletons. Si $x_1 \neq x_2$, montrer qu'on peut trouver des ouverts U, V disjoints de E tels que $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$.
   (b) Montrer qu'il existe une application continue $f : E \to [0, 1]$ telle que $F_1 = f^{(-1)}(\{1\})$ et $F_2 = f^{(-1)}(\{0\})$.
   On pourra construire une telle application à partir d'un quotient faisant intervenir les applications $x \mapsto d(x, F_1)$ et $x \mapsto d(x, F_2)$.
   (c) E est **normal** : Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F_1 \subset U$ et $F_2 \subset V$.
   On pourra introduire $\varphi : x \mapsto d(x, F_1) - d(x, F_2)$.

4. Lipschitzianité, Uniforme continuité

19 Soir $f : E \to E$ telle que $f(x) = x$ si $\|x\| < 1$ et $\dfrac{x}{\|x\|}$ sinon.

Montrer que f est 2-lipschitzienne.

20 Étudier l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$ de $|\cdot|$, $x \mapsto x^2$, et celle de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

21 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$-hölderienne : c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant k\sqrt{|x - y|}$. En déduire l'uniforme continuité de $\sqrt{\cdot}$.
Est-elle lipschitzienne ?

1. C'est cet axiome qui garantit l'unicité de la limite.

22 Étudier l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}_*^+$ de ln et $x \mapsto x \ln x$.

23 Montrer qu'une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

24 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f(x)\right| \leqslant a|x| + b.$$

25 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ continue telle que f admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.