SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{R},+)$

Préambule : Si $x \in G$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $kx \in G$, i.e. $x\mathbb{Z} \subset G$.

C'est une propriété facile de groupe additif, utilisable directement.

On peut la montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

- l'initialisation est vraie car $0 \cdot x = 0 \in G$
- et pour l'hérédité, si la propriété est vraie pour un $k \in \mathbb{N}$, alors $(k+1)x = kx + x$ avec $kx \in G$ par hypothèse de récurrence et $x \in G$ donc $(k+1)x \in G$,
- ce qui établit la récurrence.

Si $k \in \mathbb{Z}^-$, alors $kx = -(-k)x$ avec $-k \in \mathbb{N}$ donc $(-k)x \in G$ d'après ce que l'on vient de faire puis $kx = -(-k)x \in G$ d'après le premier résultat démontré.

On a ainsi le résultat vrai pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

1. **Existence de borne inférieure** :

Comme on suppose $G \neq \{0\}$ et que $G \neq \varnothing$ on a au moins un élément x de G qui n'est pas nul.

- Soit $x > 0$ et dans ce cas là, $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x < 0$, mais comme $-x \in G$, $-x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$.

Dans les deux cas, $G \cap \mathbb{R}_+^* \neq \varnothing$.

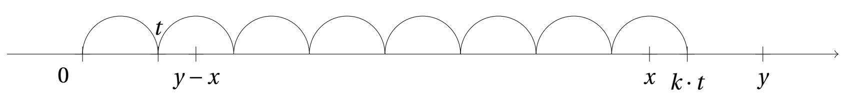
$G \cap \mathbb{R}_+^*$ étant une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée (par 0, par exemple), $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure α.

2. **Cas $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$** :

Soit $\delta > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$, comme $\delta > \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$, il existe $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $x < \delta$.

On a donc bien $x \in G$ et $0 < x < \delta$.

Soient $x, y \in G$ tels que $x < y$. On cherche à montrer que l'on peut trouver un élément de G compris entre x et y.
D'après la question précédente, on peut trouver $t \in G$ tel que $0 < t < y - x$.
Peut-on trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x < kt < y$?



(Le dessin représente $0 < x < y$ *mais le raisonnement est valable dans le cas général.)*

Posons $k = \left\lfloor \dfrac{x}{t} \right\rfloor + 1$. ($t \neq 0$).

Alors
$$\frac{x}{t} - 1 < k - 1 \leqslant \frac{x}{t}$$
et donc
$$\frac{x}{t} < k \leqslant \frac{x}{t} + 1.$$
Ainsi, comme $t > 0$,
$$x < kt \leqslant x + t < x + (y - x)$$
D'où $x < kt < y$.
De plus, $t \in G$ et, d'après ce qui a été dit en préambule, $kt \in G$.

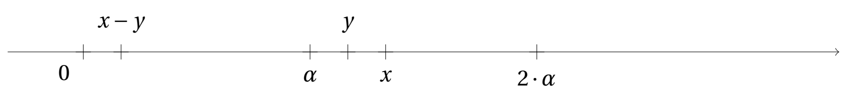
Finalement, si $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$:

3.a) Entre $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{2\alpha}$:

Par caractérisation de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$, comme $2\alpha > \alpha$, on peut trouver $\boxed{x \in G \text{ tel que } \alpha \leqslant x < 2\alpha.}$

Supposons, par l'absurde, que $\alpha < x < 2\alpha$.
Alors, par caractérisation de la borne inférieure, comme $x > \alpha$, on peut trouver $y \in G$ tel que $\alpha \leqslant y < x$:



Mais alors $-x < -y \leqslant -\alpha$ et donc $0 < x - y < \alpha$ ce qui est contradictoire car $x - y \in G$ et $\alpha = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$.

Ainsi, $\boxed{x = \alpha}$ et $\alpha \in G$.

D'après ce qui a été fait en préambule, on a alors $\boxed{\alpha\mathbb{Z} \subset G.}$

3.b) Réciproque :

On a $x \in G$ et on voudrait trouver $q \in \mathbb{Z}$ tel que $q\alpha \leqslant x < (q+1)\alpha$.

Posons $\boxed{q = \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor \in \mathbb{Z}.}$ Alors $q \leqslant \dfrac{x}{\alpha} < q+1$ et donc $\boxed{q\alpha \leqslant x < (q+1)\alpha.}$

On a, d'après la question précédente, $q\alpha \in G$ et donc $x - q\alpha \in G$.
Mais comme $q\alpha \leqslant x < (q+1)\alpha$, on a

$$0 \leqslant x - q\alpha < \alpha.$$

Or $\alpha = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$ donc on ne peut qu'avoir $x - q\alpha = 0$.

Ainsi, $\boxed{x = q\alpha \text{ avec } q \in \mathbb{Z}.}$

3.c) Conclusion :

On a donc, d'après la question **3.b)** $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ et d'après la question précédente, $G \subset \alpha\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\boxed{\text{dans le cas où } \alpha = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) \neq 0,\ G = \alpha\mathbb{Z}.}$

---

4. Applications :

4.a) Densité de $\left\{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b^k}} \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}\right\}$:

Soit b un entier au moins égal à 2. On note $G = \left\{\dfrac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\}$. On a bien sûr $G \neq \varnothing$ et $G \neq \{0\}$.

De plus, si x et y sont des éléments de G, on a $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{b^k}$ et $y = \frac{a'}{b^{k'}}$.

Mais alors $x - y = \frac{ab^{k'} - a'b^k}{b^{k+k'}}$ avec $ab^{k'} - a'b^k \in \mathbb{Z}$ et $k + k' \in \mathbb{N}$, donc $x - y \in G$.
De plus, comme 0 minore $G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{b^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ (car $b > 1$) avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{b^k} \in G$,

$$\alpha = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = 0.$$

C'est donc que $\boxed{\left\{\dfrac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

Remarque : cette densité se retrouve directement en remarquant que la suite de terme général $x_n = \dfrac{\lfloor b^n x \rfloor}{b^n}$ élément de G converge vers $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

4.b) CNS pour que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

Soit $G = a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$. On vérifie sans mal que G n'est ni vide, ni réduit à 0 et que la différence de deux éléments de G est encore dans G.

Remarquons que dire que

« $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ »

c'est dire que

« $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. »

- Si $G = a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, alors, d'après ce qui précède, $G = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$.
  Donc, comme $a \in G$ et $b \in G$, on a deux entiers k et k' (non nuls car a et b sont non nuls) tels que $a = \alpha k$ et $b = \alpha k'$.
  Alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k'}{k} \in \mathbb{Q}$.
- Réciproquement, si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, soient n et m deux entiers tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{n}{m}$.
  Pour tout $x \in G = a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$, on a $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $x = ap + bq$. Mais alors

  $$x = b\frac{n}{m}p + bq = \frac{b}{m}(np + mq) \in \frac{b}{m}\mathbb{Z}.$$

  Ainsi, $G = a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} \subset \dfrac{b}{m}\mathbb{Z}$. Mais alors G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car on ne peut pas, par exemple, trouver d'élément de G entre $\dfrac{b}{3m}$ et $\dfrac{b}{2m}$.
  (On peut aussi voir que $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) \geqslant \dfrac{b}{m} > 0$.)
  (Remarque : le théorème de Bézout permet de dire que si la fraction $\dfrac{n}{m}$ est irréductible, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = \dfrac{b}{m}\mathbb{Z}\left(= \dfrac{a}{n}\mathbb{Z}\right)$.)

Conclusion : $\boxed{a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}.}$

4.c) Autre application :

D'après la question précédente, comme $\dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Donc entre } \pi \text{ et } \pi + 10^{-9}\text{, il y a un réel de la forme } p + q\sqrt{2} \text{ où } p, q \in \mathbb{Z}.}$