# Topologie

- Attention, ouverts et fermés ne sont pas antinomiques. On peut être l'un et l'autre et on n'est, en général, ni l'un ni l'autre.
- Les caractérisations séquentielles sont très pratiques : si elles ne sont pas systématiquement utilisées, elles permettent souvent de faire des raisonnements concis.

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

## Vrai ou faux

1. Un voisinage d'un point est toujours borné.
2. Une partie qui n'est pas ouverte est fermée.
3. Une intersection d'ouverts est ouverte.
4. L'adhérence d'une partie est toujours fermée.
5. Si un fermé contient une partie, il contient son adhérence.
6. Si une partie $A$ est fermée, toute suite d'élément de $A$ converge dans $A$.
7. Un point n'est pas intérieur à $A$ si et seulement s'il est adhérent au complémentaire de $A$.

## 1. Ouverts, fermés

**1** **CCINP 37** On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que $N_\infty$ et $N_1$ sont deux normes sur $E$.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f$ de $E$, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme $N_1$ est un ouvert pour la norme $N_\infty$.
2. Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.

**2** **CCINP 38** On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leq i\leq n} |a_i|$ où $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1. (a) Démontrer que $N_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans la suite de l'exercice, on admet que $N_1$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme $N_\infty$ est un ouvert pour la norme $N_1$.
   (c) Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à $k$. On note $N_1'$ la restriction de $N_1$ à $\mathbb{R}_k[X]$ et $N_\infty'$ la restriction de $N_\infty$ à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes $N_1'$ et $N_\infty'$ sont-elles équivalentes ?



**3** Soit $A$ une partie non vide de $E$. Si $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf\limits_{y\in A} d(x, y)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \left\{x \in E,\ d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$.

1. Justifier la bonne définition de $d(x, A)$.
2. Montrer que $A_n$ est ouvert.
3. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \overline{A}$.
4. En déduire que tout fermé de $E$ est une intersection dénombrable (ie indexée par des entiers) d'ouverts.
5. Montrer que tout ouvert de $E$ est une réunion dénombrable de fermés.

**4** Soit $E$ un espace vectoriel normé, $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ supplémentaires, $p, q$ les projections associées à la somme directe $F \oplus G$ et $A$ une partie de $E$.

Montrer que si $A$ est ouverte, $p(A)$ est un ouvert (relatif) de $F$ et $q(A)$ est un ouvert de $G$.
En est-il de même pour une partie fermée ?

## 2. Adhérence, intérieur

**5** Montrer que ${}^c\mathring{A} = \overline{{}^cA}$ et ${}^c\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{{}^cA}}$

**6** Si $A$ est une partie non vide de $E$ et $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf\limits_{y\in A} d(x, y)$.

Justifier la bonne définition de $d(x, A)$ et montrer que $x \in \overline{A}$ si set seulement si $d(x, A) = 0$.

**7** Si $A$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup A$ est l'unique majorant de $A$ adhérent à $A$.

**8** Si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$, montrer que $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$ et donner des contre-exemples pour les inclusions réciproques.

**9** Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}$.

**10** Montrer que si $A \subset B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

**11** **CCINP 34** Soit $A$ une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $E$.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à $A$, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $x_n \to x$.
3. Démontrer que, si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
4. Démontrer que si $A$ est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

**12** Soit $F$ sous-espace vectoriel normé de $E$. Montrer que soit $F = E$ soit $\mathring{F} = \varnothing$.

**13** Soit $A$ une partie de $E$. Comparer par inclusion les parties $A$, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$. Peut-on créer d'autres combinaison ?

Calculer tous ces ensembles pour $A = 0 \cup [1,2[\cup]2,3] \cup (\mathbb{Q} \cap [4,5])$.

**14**

1. Comparer $\operatorname{Fr} A$ et $\operatorname{Fr} {}^c A$.
2. Montrer que $\operatorname{Fr} A \cup B \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $\operatorname{Fr} \overline{A} \subset \operatorname{Fr} A$ et $\operatorname{Fr} \mathring{A} \subset \operatorname{Fr} A$. Ces inclusions sont-elles des égalités ?

## 3. Densité

**15** Soit $G$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On se propose de montrer un résultat très classique à retenir : $G$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit discret (de la forme $\alpha\mathbb{Z}$).

On suppose dans la suite que $G \neq \{0\}$ (le résultat étant vrai pour $G = \{0\}$).

**1.** Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. En déduire que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure. On note $\alpha$ cette borne inférieure.

**2.** On suppose dans cette question que $\alpha = 0$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in G$ tel que $0 < x < \delta$. En déduire que $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**3.** On suppose dans cette question que $\alpha > 0$.

**3.a)** Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $\alpha \leqslant x < 2\alpha$. En déduire que $x = \alpha$, puis que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

**3.b)** Soit réciproquement $x \in G$. Montrer que l'on peut trouver $q \in \mathbb{Z}$ tel que $q\alpha \leqslant x < (q+1)\alpha$. En déduire que $x = q\alpha$.

**3.c)** Conclure.

**4.** Applications.

**4.a)** Soit $b$ un entier au moins égal à 2. Montrer que $\left\{\dfrac{a}{b^k},\ (a,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**4.b)** Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ap + bq \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.
Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

**4.c)** Montrer qu'entre $\pi$ et $\pi + 10^{-9}$, il y a un réel de la forme $p + q\sqrt{2}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$.



**16** Montrer que $\left\{\dfrac{k}{2^n}\ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$ est dense dans $[0,1]$.

**17** Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.