Solution de 19 :

1. Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

La série harmonique alternée est convergente d'après le théorème spécial sur des séries alternée. On sait même calculer sa somme $-\ln 2$ soit à l'aide d'une intégrale, soit en utilisant le développement (classique aussi) de $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$. Car la somme partielle

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1}$$

en séparant les termes d'indices pairs et impairs. Puis, comme dans Wallis, la somme des termes d'indices pairs se calcule facilement et la somme des termes d'indices impairs s'exprime à l'aide de l'autre somme. En effet,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} H_n$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n.$$

Donc

$$S_{2n} = H_n - H_{2n} = \ln n + \gamma - \big(\ln(2n) + \gamma\big) + \mathrm{o}(1) = -\ln 2 + \mathrm{o}(1)$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$. Calcul à savoir faire.

Revenons à l'exercice. Plutôt que de risquer d'écrire des bêtises, on revient à des sommes finies.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{p} \frac{(-1)^k}{k} &\underset{k=j+1}{=} \sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{j=n+1}^{p-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} + \frac{(-1)^p}{p+1}\end{aligned}$$

Or $\frac{(-1)^p}{p+1} \to 0$ et $\sum \frac{(-1)^k}{n(n+1)}$ converge soit par le TSSA, soit car elle converge absolument, vu que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (télescopique) ou alors que $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$.

Donc, en faisant $p \to +\infty$, $\boxed{R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.}$

2. Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

Comme $R_{n+1} = R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, on en déduit que $2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

Comme le TSSA s'applique à $\sum \frac{(-1)^k}{n(n+1)}$ donc $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $2R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et enfin $\boxed{R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.}$

Comme le signe n'est pas constant, il ne faut surtout pas se précipiter pour en déduire la nature de la série de terme général R_n.

Cependant, dans le calcul précédent, on avait plus précisément $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $R_n = u_n + v_n$ où $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ et $v_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\sum u_n$ converge par TSSA et $\sum v_n$ converge car elle converge absolument par comparaison de séries à termes généraux positifs.

Finalement, $\boxed{\sum R_n \text{ converge.}}$

Solution de 26 :

$\frac{2}{3} n\sqrt{n}$

Solution de 27 :

$n \ln n$

Solution de 32 : Développement asymptotique de la série harmonique et de n!

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (constante d'Euler).

Très classique, vu en cours. Pour montrer que la suite converge, on montre que la série télescopique associée converge. Or si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n - \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Donc, par comparaisons de séries à termes généraux positifs convergentes, la série de terme général $H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n - \ln n$ est absolument convergente donc convergente, et par suite, $\boxed{\text{la suite } (H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } \gamma \in \mathbb{R}.}$

Remarque : On ne sait que peu de choses sur cette constante. Est-elle rationnelle ? irrationnelle ? Algébrique ? Transcendante ?

2. Si $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Là aussi, c'est classique et déjà vu. Par comparaison à une intégrale, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $[2, +\infty[$ de primitive $t \mapsto \frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}$, on a l'encadrement

$$\int_n^p \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{p+1} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{p-1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

puis en faisant $p \to +\infty$

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

d'où par encadrement $\boxed{R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln n - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$ puis de t_n.

On calcule comme dans la première question en poussant plus loin le développement

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $t_{n+1} - t_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ et par comparaison de termes généraux positifs de séries convergentes, $\sum(t_n - t_{n+1})$ converge et les restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (t_k - t_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

soit, avec $t_n \to 0$, et la question précédente pour $\alpha = 2$,

$$t_n \sim \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot n} = \frac{1}{2n}$$

donc $\boxed{t_n \sim \frac{1}{2n}.}$ Ainsi, $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$

4. Raisonner de même pour montrer que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Puis en posant $u_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2(n+1)} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{6n^3}$ terme général positif de série convergente, donc par sommation dans le cas de convergence, $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}$$

ce qui donne $-u_n \sim \frac{1}{6 \cdot 2n^2}$ en utilisant la question 2, soit $u_n \sim -\frac{1}{12n^2}$, ce qui permet de conclure $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$