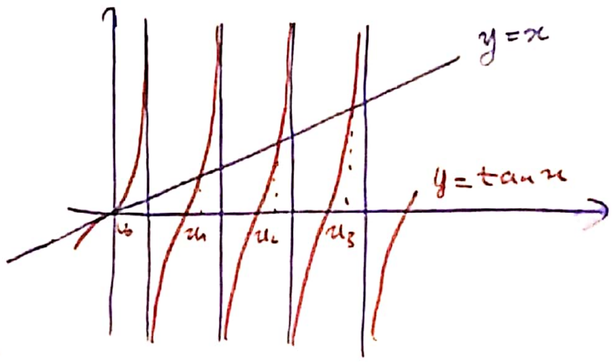
(14) 1. Soit $f : x \mapsto \tan x - x$,

$I_n =]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$.



f dérivable sur I_n et $f' : x \mapsto \tan^2 x \geq 0$

$f(x) \xrightarrow[x\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^+]{} -\infty$, $f(x) \xrightarrow[x\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^-]{} +\infty$

f continue, strictement croissante sur I_n.

Elle induit un homéomorphisme de I_n sur $]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$.

Donc $f(x)=0$ a une unique solution sur I_n : u_n.

2. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2}+n\pi < u_n < \frac{\pi}{2}+n\pi < u_{n+1}$

donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ strictement croissante}}$ et $-\frac{\pi}{2}+n\pi \to +\infty$ donc $\boxed{u_n\to+\infty}$

3. $\forall n\in\mathbb{N}$, $1-\frac{1}{2n} < \frac{u_n}{n\pi} \leq 1+\frac{1}{2n}$ donc $\frac{u_n}{n\pi}\to 1$ par encadrement

et $\boxed{u_n \sim n\pi}$

4. $v_n = u_n - n\pi \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et $\tan v_n = \tan u_n = u_n$ donc

$v_n = \operatorname{Arctan}(u_n) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ donc $v_n = \frac{\pi}{2}+o(1)$

et $\boxed{u_n = n\pi + v_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}$

5. Pour aller plus loin, on se ramène à une arctangeante au voisinage de 0. Or $u_n > 0$ donc $v_n = \operatorname{Arctan} u_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u_n}\right)$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{2n^2\pi}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[\left(\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{2n^2\pi}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\boxed{u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$