

## CALCUL DE PRIMITIVES

- Connaissez bien sûr toutes les techniques usuelles.
- Astuce très courante : faire du «  $+X - X$  » ou du «  $+1 - 1$  » au numérateur...
- En cas de changement de variable, bien penser à changer les bornes, et toujours écrire le «  $dx$ , sinon, vous en oublierez un morceau avec le changement de variable.

Déterminer les primitives (sur des intervalles à déterminer également), ou calculer les intégrales.

1.  $x e^{x^2}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \sin t \, dt$

3.  $\cos^3 x$

4.  $\int_0^2 \frac{t^2}{1+t^3} \, dt$

5.  $\frac{x}{1+x^4}$

6.  $\frac{1}{x-i}$

7.  $\int_0^{\pi} t^2 e^t \sin t \, dt$

8.  $x \sin^3 x$

9.  $\int_{-1}^5 (t^2 - t + 1)e^{-t} \, dt$

10.  $(x+1) \operatorname{ch} x$

11.  $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln t) \, dt$

12.  $\operatorname{Arcsin} x$

13.  $\int_0^1 \operatorname{Arctan} t \, dt$

14.  $\frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}$

15.  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2t}}{e^t + 1} \, dt$

16.  $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

17.  $\frac{1}{x(x^2-1)}$

18.  $\frac{x^5}{1+x^{12}}$

19.  $\frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

20.  $\frac{x}{x^2 + 2x + 2}$

21.  $\int_1^2 \frac{t+1}{t^2-t+1} \, dt$

22.  $\frac{1}{x(x^2+1)}$

23.  $\int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} \, dt$

24.  $\frac{1}{e^{2x} + e^x}$

25.  $\frac{1}{\cos x}$

26.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \cos^2 t} \, dt$

27.  $\frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$

28.  $\frac{1}{\cos^4 x}$

29.  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 + \cos t} \, dt$

30.  $\frac{\tan x}{2 - \cos^2 x}$

31.  $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \sin t \cos t} \, dt$

32.  $\frac{1}{1 - \operatorname{th} x}$

33.  $\frac{\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{ch} x}$

34.  $\frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{ch}^2 x}$

35.  $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t} \, dt$

36.  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

37.  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$

38.  $\frac{1}{(x+4)\sqrt{x+1}}$

39.  $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

40.  $\frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}$

41.  $\frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

42.  $\int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} \, dt$

43.  $\frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}$

44.  $\frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

45.  $\sqrt{x-x^2+6}$

46.  $\int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} \, dt$

47.  $\int_0^1 \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} \, dt$

48.  $\int_1^2 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \, dt$

# Indications

- |   |  |                                      |
|---|--|--------------------------------------|
| 1. Direct                                     | 16. CV et/ou IPP   | 33. Bioche                           |
| 2. Direct                                     | 17. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$                            | 34. Bioche                           |
| 3. Transformer $\cos^2$ ou linéariser         | 18. Direct   | 35. CV $u = e^t$                     |
| 4. Direct                                     | 19. Forme canonique  | 36. Direct                           |
| 5. $x^4 = (x^2)^2$                            | 20. Forme canonique  | 37. CV                               |
| 6. Passer à la forme algébrique               | 21. Forme canonique  | 38. CV                               |
| 7. Complexes et IPP                           | 22. $+\dots - \dots$   | 39. CV $u = \frac{1}{x}$             |
| 8. IPP et transformer $\sin^2$ et utiliser 3. | 23. $+\dots - \dots$ ou CV   | 40. CV                               |
| 9. IPP  | 24. CV et $\frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u^2} + \frac{c}{u+1}$ | 41. CV                               |
| 10. IPP                                       | 25. Bioche   | 42. CV et linéarisation              |
| 11. IPP ou CV                                 | 26. Direct ou Bioche   | 43. CV                               |
| 12. IPP                                       | 27. Direct ou Bioche   | 44. Forme canonique et CV            |
| 13. IPP                                       | 28. Bioche   | 45. Forme canonique et CV            |
| 14. CV  | 29. Bioche   | 46. CV                               |
| 15. CV  | 30. CV $u = \tan x$  | 47. CV $x = \dots(t)$ puis $u = e^x$ |
|   | 31. Bioche   | 48. CV                               |
|   | 32. CV $u = e^x$   |                                      |

# Réponses

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $\frac{e^{x^2}}{2} + C$ (R)   | 18. $\frac{\text{Arctan } x^6}{6} + C$ (R)   | 33. $\ln \text{ch } x - \ln(\text{ch } x + 1) + C$ (R)  |
| 2. $\frac{1}{4}$   | 19. $\text{Arctan}(x-1) + C$ (R)   | 34. $\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan} \frac{\text{sh } x}{\sqrt{2}} + C$ (R)                          |
| 3. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ (R)   | 20. $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) - \text{Arctan}(x+1) + C$ (R)   | 35. $2 \text{Arctan } e - \frac{\pi}{2}$  |
| 4. $\frac{2 \ln 3}{3}$   | 21. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{\ln 3}{2}$  | 36. $\sqrt{1+x^2} + C$ (R)  |
| 5. $\frac{\text{Arctan } x^2}{2} + C$ (R)  | 22. $\ln x  - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_k$ ( $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ )   | 37. $2 \text{Arctan} \sqrt{x} + C$ ( $\mathbb{R}_+^*$ )   |
| 6. $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + i \text{Arctan } x + C$ (R)   | 23. $1 + \ln 2 - \ln(1+e)$   | 38. $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \sqrt{\frac{x+1}{3}} + C$ ( $]-1, +\infty[$ )                   |
| 7. $\frac{1 + (\pi-1)^2 e^\pi}{2}$   | 24. $\ln(1+e^x) + 1 - x - e^{-x} + C$ (R)  | 39. $\text{sgn}(x) \text{Arccos} \frac{1}{x} + C_k$ ( $I_1 = ]-\infty, -1[$ ou $I_2 = ]1, +\infty[$ ) |
| 8. $\frac{1}{3} x \cos^3 x - x \cos x + \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{9} \sin^3 x + C$ (R)   | 25. Sur $I_k = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ , $\frac{1}{2} \ln \left  \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right  + C_k$ ou $\ln \left  \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C_k$ | 40. $\frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - x + C$ ( $]-1, +\infty[$ )                                     |
| 9. $2e - 32e^{-5}$   | 26. $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln(1+\sqrt{2})$   | 41. $4 \ln(\sqrt{x}+1) - 2\sqrt{x} + C$ ( $\mathbb{R}_+^*$ )  |
| 10. $x \text{sh } x - e^{-x} + C$ (R)  | 27. $\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x} + C$ (R)   | 42. $\frac{\pi}{16}$  |
| 11. $\frac{e^\pi + 1}{2}$  | 28. Sur $I_k = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ , $\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C_k$  | 43. $\text{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2-x^2} + C$ ( $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ )                 |
| 12. $x \text{Arcsin } x + \sqrt{1-x^2} + C$ ( $]-1, 1[$ )  | 29. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$  | 44. Sur $]1, 3[$<br>$2 \text{Arcsin}(x-2) - \sqrt{(x-1)(3-x)} + C$                                    |
| 13. $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$  | 30. Sur $I_k = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ , $\frac{\ln(2 \tan^2 x + 1)}{4} + C_k$  | 45. Sur $[-2, 3]$ $\frac{2x-1}{4} \sqrt{x-x^2+6} + \frac{25}{8} \text{Arcsin} \frac{2x-1}{5} + C$     |
| 14. $\frac{\ln(1+\ln^2 x)}{2} + C$ ( $\mathbb{R}_+^*$ )  | 31. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$  | 46. $\sqrt{2}-1 + \ln(1+\sqrt{2})$  |
| 15. $\ln 2 - \ln 3 + 1$  | 32. Sur $\mathbb{R} : \frac{e^{2x}+2x}{4} + C$   | 47. $\frac{\sqrt{2}-1 + \ln(1+\sqrt{2})}{2}$  |
| 16. $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$ ( $\mathbb{R}_+^*$ )   |  | 48. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$  |
| 17. $\frac{\ln x^2-1  - 2 \ln x }{2} + C_k$ ( $I_1 = ]-\infty, -1[$ ou $I_2 = ]-1, 0[$ ou $I_3 = ]0, 1[$ ou $I_4 = ]1, +\infty[$ ) |  |   |