Éléments de correction

Exercice 1 - 6

- Si $n=0$, $f=|\cdot|$ est connue.
  Remarquons que f est paire. Elle n'est pas dérivable en 0 sinon $x\mapsto |x| = f(x)\times\left(1+\left|1-x^2\right|\right)^n$ le serait.
  Elle n'est pas dérivable en ± 1 sinon $x\mapsto \left|1-x^2\right| = \sqrt[n]{\dfrac{|x|}{f(x)}}-1$ le serait par opérations.
  f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ par opérations.
  - ⋆ Si $x>1$, $f(x)=\dfrac{x}{x^{2n}}=\dfrac{1}{x^{2n-1}}$ et $f'(x)=\dfrac{1-2n}{x^{2n}}$.
  - ⋆ Par parité de f (donc imparité de f'), si $x<-1$, $f'(x)=\dfrac{2n-1}{x^{2n}}$.
  - ⋆ Si $0<x<1$, $f(x)=\dfrac{x}{\left(2-x^2\right)^n}$ et $f'(x)=\dfrac{(2n-1)x^2+2}{\left(2-x^2\right)^{n+1}}$.
  - ⋆ Par parité de f (donc imparité de f'), si $-1<x<0$, $f'(x)=-\dfrac{(2n-1)x^2+2}{\left(2-x^2\right)^{n+1}}$.

Exercice 3

3. Voir cours sur la dérivation

5. On linéarise : $\cos^2 x\sin x = \dfrac{\sin x}{4}+\dfrac{\sin 3x}{4}$ d'où on tire l'expression de la dérivée n-ième :

$$\frac{\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{4}+\frac{3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)}{4}.$$

Exercice 18

On remarque que 3 et 5 sont solutions. Soit $f : x\mapsto 17+2^x-(x+2)^2$. f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x>0$, $f'(x)=(\ln 2)2^x-2(x+2)$ et $f''(x)=(\ln 2)^2 2^x-2$. f'' est strictement croissante, $f''(0)<0$ et $f''(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ donc f'' s'annule une et une seule fois en $\alpha=\dfrac{2\ln(2/\ln 2)}{\ln 2}\in]3,5[$.

D'où le tableau de variation :

x	0		3		α		β		5		$+\infty$
$f''(x)$		$-$			0			$+$			
$f'(x)$	<0	↘	<0	↘	<0	↗	0	↗	>0	↗	$+\infty$
$f(x)$	16	↘	0	↘		↘		↗	0	↗	$+\infty$

Les variations de f' et le théorème de la bijection permettent de conclure que f' s'annule une et une seule fois en $\beta\in]\alpha,5[$, puis les variations de f nous donnent que 3 et 5 sont les seules solutions.

Exercice 37

1. Encadrement de $4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}$

Comme $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, et $\frac{1}{5}<\frac{\sqrt{3}}{3}$ (car $25>3$!), la stricte croissance de Arctan sur $\mathbb{R}$ nous permet d'écrire

$$0=\operatorname{Arctan}0<\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}<\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$$

Ainsi,

$$-\frac{\pi}{4}<4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{12}$$

On a donc bien, en particulier, $\boxed{4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$.

2. Calcul de $\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$

Notons $\alpha=\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5}$. Alors

$$\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan(4\alpha)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan(4\alpha)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan(4\alpha)-1}{1+\tan(4\alpha)} \tag{1}$$

Or

$$\tan(4\alpha)=\tan(2\times 2\alpha)=\frac{2\tan(2\alpha)}{1-\tan^2(2\alpha)}$$

avec

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

donc

$$\tan(4\alpha)=\frac{4\tan\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right)}{\left(1-\tan^2\alpha\right)-4\tan^2\alpha}$$

Mais $\tan\alpha=\tan\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$. Donc

$$\tan(4\alpha)=\frac{\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{25}\right)}{\left(1-\frac{1}{25}\right)^2-\frac{4}{25}}=\frac{120}{119}$$

On obtient donc, en remplaçant dans (1),

$$\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{120}{119}-1}{\frac{120}{119}+1}=\frac{1}{239}$$

On a démontré que $\boxed{\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{239}}$.

Justifions les calculs de tangentes :

- Défini comme une arc tangente, $\alpha=\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\alpha$ est bien défini.
- De plus, comme $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$, on a $0<2\alpha<\frac{\pi}{3}$ donc $2\alpha\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\tan(2\alpha)$ est bien défini.
- Ensuite, $0<4\alpha<\frac{2\pi}{3}$: le seul problème que l'on peut avoir est le cas où $4\alpha=\frac{\pi}{2}$ i.e. $\alpha=\frac{\pi}{8}$. Or on a vu que $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ et $\tan\alpha=\frac{1}{5}\neq\sqrt{2}-1$. Donc $\tan(4\alpha)$ est bien défini.
- Finalement, on vient de démontrer que $4\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ est bien défini.

3. Formule de John Machin

D'après ce qui précède, $4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5}-\dfrac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}$ ont même tangente, et ils sont tous deux dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par bijectivité de la restriction de la fonction tangente à $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a donc

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}=\operatorname{Arctan}\frac{1}{239}$$

d'où $\boxed{4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5}-\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}}$.

Exercice 38

1. Comme $a>0$ et $b>0$, $\operatorname{Arctan} a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan} b \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Cela permet d'écrire $\boxed{\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}(\tan(\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b)) = \operatorname{Arctan}\dfrac{a-b}{1+ab}.}$

2. Cette formule s'applique et permet d'écrire $\boxed{\operatorname{Arctan} 2 - \operatorname{Arctan} 3 = -\operatorname{Arctan}\frac{1}{7}.}$

3. Fonction f_a : f_a est définie et dérivable sur $D_0 = \mathbb{R}$ si $a=0$, avec $f_0 : x \mapsto \operatorname{Arctan} 0 = 0$ et $\boxed{f_0' = 0}$ et sur $D_a = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{a}\right\}$ sinon car $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ l'est sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \dfrac{a+x}{1-ax}$ l'est sur D_a. De plus, on a, pour $x \in D_a$,

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1-ax+a(a+x)}{(1-ax)^2}}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{1+a^2x^2+a^2+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_a' = 0.}$

4. Détermination de $f_a(b)$: D'après la question précédente, f_a est constante sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

- Si $a=0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_0(x) = f_0(0) = 0$. Donc $\boxed{f(b)=0.}$
- Si $a\neq 0$, on a $c,d\in\mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \left]-\infty,\frac{1}{a}\right[,\ f_a(x) = c$ et $\forall x\in\left]\frac{1}{a},+\infty\right[,\ f_a(x) = d$.

  On remarque également que $f_a(0) = 0$ et $\dfrac{a+x}{1-ax} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\dfrac{1}{a}$, donc, par continuité et imparité de Arctan, $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan}\frac{1}{a} \pm \frac{\pi}{2}$ avec $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan}\frac{1}{a} = \operatorname{sgn}(a)\frac{\pi}{2}$ (voir démonstration dans le cours). Ainsi

  ★ Si $a>0$, $0\in\left]-\infty,\frac{1}{a}\right[$ donc $c=0$ et $d = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2} = \pi$.

  ★ Si $a<0$, $0\in\left]\frac{1}{a},+\infty\right[$ donc $d=0$ et $c = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} = -\pi$.

En résumé, $\boxed{f_a(b) = k\pi}$ avec

- $\boxed{k=0}$ si $a>0$ et $b<\frac{1}{a}$ (soit $ab-1<0$) ou $a<0$ et $b>\frac{1}{a}$ (soit $ab-1<0$) ; autrement dit $\boxed{\text{si } ab-1<0.}$
- $\boxed{k=\operatorname{sgn}(a) \text{ si } ab-1>0.}$

5. Ainsi, pour tout a,b, $\boxed{\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\dfrac{a+b}{1-ab} + k\pi}$ avec k comme ci-dessus.

6.a) $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$: Comme $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}-1<0$, d'après ce qui précède, $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} 15 = \operatorname{Arctan}\frac{7/10}{9/10} = \operatorname{Arctan}\frac{7}{9}$.

De plus, comme $\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}-1<0$, d'après ce qui précède,

$$\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \operatorname{Arctan}\frac{65/72}{65/72} = \operatorname{Arctan} 1$$

d'où $\boxed{\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}.}$

6.b) $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 + \operatorname{Arctan} 8$: Comme $2\times 5 - 1 > 0$ et $2>0$,

$$\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 = -\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \pi$$

d'après **2**. Puis, d'après **3**, $\operatorname{Arctan} 8 - \operatorname{Arctan}\frac{7}{9} = \operatorname{Arctan}\dfrac{65/9}{65/9} = \dfrac{\pi}{4}$.

Finalement, $\boxed{\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 + \operatorname{Arctan} 8 = \dfrac{5\pi}{4}.}$

Remarque : On aurait pu utiliser les formules donnant $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ *et la question précédente.*

7. Bonus : Formule de John Machin : Comme $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}-1<0$,

$$2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{2/5}{24/25} = \operatorname{Arctan}\frac{5}{12}.$$

De même, comme $\dfrac{5}{12}\times\dfrac{5}{12}-1<0$, $4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} = 2\operatorname{Arctan}\dfrac{5}{12} = \dfrac{5/6}{119/144} = \operatorname{Arctan}\dfrac{120}{119}$.

Ainsi, d'après **3.** $\operatorname{Arctan}\dfrac{120}{119} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239} = \operatorname{Arctan}\dfrac{28561/(119\times 239)}{28561/(119\times 239)} = \operatorname{Arctan} 1$ d'où $\boxed{4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}.}$