Calculs en analyse

- Lorsque l'on a une fonction du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$, il faut avoir le réflexe de passer à la forme exponentielle $u(x)^{v(x)} = \exp\big(v(x)\ln u(x)\big)$.
- Attention si $\cos(\text{Arccos}\, x) = x$ pour $x \in [-1,1]$, on n'a pas en général $\text{Arccos}(\cos y) = y$ sauf si $y \in [0,\pi]$, avec les remarques similaires pour Arcsin et Arctan.
- Il peut être parfois utile de revenir aux exponentielles de la définition des fonctions hyperboliques.

1 Déterminer l'ensemble D des points en lesquels f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

1. $f(x) = x\tan(x^2)$
2. $f(x) = 1-\cos\sqrt{|x|}$
3. $f(x) = x\sin x \sin\frac{1}{x}$ avec $x \neq 0$.
4. $f(x) = 1 - \mathrm{e}^x$
5. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$
6. $f(x) = \dfrac{|x|}{(1+|1-x^2|)^n}$ où $n \in \mathbb{N}$.
7. $f(x) = \tan\sqrt{1-x^2}$
8. $f(x) = \ln|x - \mathrm{e}^x \tan x|$
9. $f(x) = (1+x)^{x^2}$
10. $f(x) = \sin(\cos(\sin x))$

2 ✎ Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (respectivement impaire, T-périodique) est impaire (respectivement paire, T-périodique).

3 ✦ Déterminer la dérivée n^{e} de

1. ln,
2. $x \mapsto \dfrac{1}{1+2x}$,
3. $x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$,
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$,
5. $x \mapsto \cos^2 x \sin x$.

4 Soient $0 < a < b$. Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{array} \right.$ est strictement croissante.

Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) < (\ln 2)^2$.

5 Combien de fois la fonction $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x + 1$ s'annule-t-elle ?

6 Montrer que $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \ x^2 \geqslant 2\ln(x\sqrt{\mathrm{e}})$.

7 Existence et calcul de $\max\limits_{x\in[0,+\infty[} \left(\dfrac{x}{x^4+1}\right)$.

8 ✎ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$ et $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

9 Calculer

1. $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{8}$
2. $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$

10 ✎ Résoudre sur $\mathbb{R}$

1. $\cos 5x = 0$
2. $\sin x + \sin 2x = 0$
3. $\cos x = \sqrt{3}\sin x$
4. $\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$
5. $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$
6. $\cos x - \sin x \leqslant 1$

11 Écrire sous forme de produit $S = \sin x + \sin 2x + \sin 5x + \sin 6x$, puis résoudre l'équation $S = 0$.

12 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $f \circ f$ croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

13 Quelles sont les involutions ($f \circ f = \mathrm{id}$) croissantes de $\mathbb{R}$?

14 À l'aide d'un calcul de dérivée, trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall\, x, y,\ \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

15 Trouver toutes les $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall\, x,\ \ f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$.

16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall\, x,\ \ f(x) \neq 3$ et $f(x+1) = \dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$. Montrer que f est 4-périodique.

17 Soit f une application périodique définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est monotone, elle est constante.

18 Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation $17 + 2^x = (x+2)^2$ à l'aide d'une étude de fonction.
Indication : il y a deux solutions « évidentes » !

19 Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$. En déduire la limite en $+\infty$ de $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

20 Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array} \right.$ est bijective et donner une expression de f^{-1}.

21 Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$, on note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parrallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 sont concourantes.

22 ✎ Donner l'allure du graphe des fonctions suivantes (on précisera l'ensemble de définition, la dérivabilité, les limites, les éventuelles périodicité, parité etc. pour **1.** à **3.**)

1. $f: x \mapsto x\ln x$

2. $g: x \mapsto e^{\sin x}$

3. $h: x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$

4. $i: x \mapsto x^2 + 5x - 3$

5. $j: x \mapsto \dfrac{3x+2}{1-2x}$

6. $\log_a$ et de sa réciproque $\exp_a$

23 ✎ Étudier le comportement asymptotique des fonctions $g: x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$ et $h: x \mapsto \dfrac{\sqrt{9x^4+3x^3-1}}{x^2+1}$.

24 ✎ Étudier le comportement à l'infini des fonctions $f: x \mapsto \dfrac{2x^3+x-1}{x^2+1}$ et $g: x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^9+2x}}{x^2-1}$.

25 Étudier $f: x \mapsto x e^{-\frac{1}{x}}$.

26 Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation $e^x + e^{-x} = a$ où a est un paramètre réel.

27 ✎ Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ tel que $\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln a + \ln b\right)$. Déterminer $\dfrac{a}{b}$.

28 ✎ Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$.

29 Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

30 ✎ Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de $x^{\sqrt{x}}$.

31 ✎ Établir que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\operatorname{sh} x \geqslant x$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

32 ✦ Soient a et α deux réels. Résoudre le système en x et y $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2a\operatorname{ch}\alpha \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2a\operatorname{sh}\alpha \end{cases}$

AJOUTER ETUDE FONCTIONS HYPERBOLIQUES RECIPROQUES

33 Étudier les fonctions $f: x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos x)$, $g: x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$ et $h: x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.

34 Dire pour quelles valeurs de x sont définies les expressions suivantes et les simplifier.

1. $\cos(2\operatorname{Arccos} x)$

2. $\cos(2\operatorname{Arcsin} x)$

3. $\sin(2\operatorname{Arccos} x)$

4. $\cos(2\operatorname{Arctan} x)$

5. $\sin(2\operatorname{Arctan} x)$

6. $\tan(2\operatorname{Arcsin} x)$

35 Simplifier, sur son ensemble de définition, $\operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

36 Simplifier $\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}$ et $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$.

37 Démontrer la formule de John Machin[1] :

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

38 On va calculer $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ pour $ab \neq 1$.

1. Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$. Montrer que $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \dfrac{a-b}{1+ab}$.

2. Calculer $\operatorname{Arctan} 2 - \operatorname{Arctan} 3$.

3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f: x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} \dfrac{a+x}{1-ax}$. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f'.

4. Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $ab \neq 1$. Démontrer que le réel $f(b)$ est un multiple entier de π que l'on précisera en discutant les signes de a et $ab - 1$ *(On pourra utiliser des limites).*

5. En déduire un expression simplifiée de $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$.

6. Calculer

6.a) $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$

6.b) $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 + \operatorname{Arctan} 8$

Remarque : On peut retrouver la formule de Machin à l'aide de cette formule.

39 Résoudre

1. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\dfrac{4}{5} + \operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{13}$

2. $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} 2x$

3. $\operatorname{Arcsin}(\tan x) = x$

4. $\operatorname{Arcsin}\dfrac{2x}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x$

1.  **John Machin** (Angleterre, 1680 - Londres, 1751) est un mathématicien britannique surtout connu pour sa découverte de la formule qui porte son nom : $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ qui lui permit de calculer en 1706 les 100 premières décimales de π, à l'aide du développement $\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

Éléments de correction