# ENSEMBLES

- Ne pas oublier qu'une égalité d'ensembles cache deux inclusions, et ne pas calculer en faisant des égalités d'ensembles, source d'erreurs.

## Vrai ou faux

1. On a toujours $\{\varnothing\} \in \mathscr{P}(E)$.
2. On a toujours $\{\varnothing\} \subset \mathscr{P}(E)$.
3. $A \cap B \subset A \cup B$
4. Si $A \cap B = B$, $A = B$.
5. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{x} > 2\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{2}\right\}$.

**1** Un ensemble est dit *décrit en compréhension* lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit *décrit en extension* lorsque l'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k ; k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.

1. Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
2. Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.
3. Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
4. Décrire en en compréhension l'ensemble $]0, 1]$. Pensez-vous qu'il soit possible de décrire cet ensemble en extension ?
5. Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**2** Démontrer les relations suivantes

1. $\{n \in \mathbb{Z} \mid (-1)^n = 1\} = 2\mathbb{Z}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}^+$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$
4. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[ = \{0\}$

**3** ✎ Soit $E = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$. Peut-on écrire

1. $a \in E$
2. $\varnothing \in E$
3. $a \subset E$
4. $\varnothing \subset E$
5. $\{a\} \subset E$
6. $\{\varnothing\} \subset E$

**4** ✎ Compléter par $\in, \notin, \subset, \not\subset$ :

1. $\varnothing \quad \ldots \quad \{1, 2, 3\}$.
2. $\{1\} \quad \ldots \quad \{1, \{1\}\}$.
3. $2 \quad \ldots \quad \{\{2\}, 3, 0\}$.
4. $\{\varnothing\} \quad \ldots \quad E$.

**5** ✦ Calculer $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$.



**6** Soient $E$ un ensemble et $A$, $B$, $C$ des parties de $E$. Montrer que

1. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
2. $B \setminus A = \overline{A} \setminus \overline{B}$
3. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$
4. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$
5. $A \subset B \iff A \cup B = B \iff \overline{A} \supset \overline{B} \iff A \cap B = A \iff A \setminus B = \varnothing \iff \overline{A} \cup B = E$

**7** **Autour des produits cartésiens**

1. Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$ et $C = \{2, 10\}$. Expliciter les produits cartésiens $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$, $(A \cap C) \times B$, ainsi que l'ensemble $(A \times B) \cap (C \times B)$. Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser le résultat ? Énoncer un résultat analogue avec les symboles $\cup$ et $\times$.
2. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = [0, 3]$, $J = [0, 4]$, $K = [1, 4]$, $L = [1, 5]$. Dessiner, dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les ensembles $I \times J$ et $K \times L$ ; déterminer $(I \times J) \cap (K \times L)$.
3. Pour les ensembles quelconques $A, B, C, D$, déterminer (en justifiant le résultat) $(A \times B) \cap (C \times D)$.
4. Montrer en donnant un contre-exemple, que $(A \times B) \cup (C \times D)$ n'est en général pas un produit cartésien.
5. Que vaut $\varnothing \times B$ ?
6. Résoudre l'équation $A \times B = \varnothing$.

**8** ✦ Résoudre, pour $A, B \in \mathscr{P}(E)$,

1. $X \cup A = B$
2. $X \cap A = B$
3. $X \setminus A = B$

**9** On définit la différence symétrique $\triangle$ sur $\mathscr{P}(E)^2$ par

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Si $A \subset E$, calculer $A \triangle A$, $A \triangle \varnothing$, $A \triangle E$ et $A \triangle \overline{A}$.
3. Justifier que $\Delta$ est commutative, puis, à l'aide d'une table de vérité, que $\Delta$ est associative.
4. Résoudre l'équation $X \triangle A = B$ d'inconnue $X$.
   *On pourra s'intéresser à $B \Delta A$.*