Logique, Raisonnements & Quantificateurs

- La première chose à acquérir est le réflexe de débuts de rédaction donnés tout au long du cours. Même si ça ne donne pas la solution, ça permet de démarrer correctement.
- Attention, dans l'utilisation de quantificateurs à l'ordre de ceux-ci : c'est très important et ça peut changer complètement une phrase. Attention aussi au sens des variables : quand on écrit « $\forall x \in E,\ \exists y \in F$ », le y dépend du x.
- Ne pas oublier que le fait qu'une implication soit vraie ne nous dit pas que l'hypothèse est vraie. Attention dans la rédaction, donc.
- Il faut être très prudent avec les équivalences : il y a deux sens (double implication). Lorsque ce n'est pas utile, préférer l'utilisation d'implications.
- Pour les récurrences, attention à la rédaction… et aux initialisations multiples éventuelles lors de récurrences fortes.

Vrai ou faux

1. La négation de « En MPSI, tout le monde fait beaucoup de maths » est « En dehors de la MPSI, personne ne fait beaucoup de maths ».
2. La réciproque de « En MPSI, tout le monde fait beaucoup de maths » est « Quand tout le monde fait beaucoup de maths, on est en MPSI. ».
3. La contraposée de « En MPSI, tout le monde fait beaucoup de maths » est « Quand tout le monde fait beaucoup de maths, on n'est pas en MPSI. ».
4. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
5. Si l'homme est un quadrupède, alors il aboie.
6. La négation de « la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ » est « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».
7. Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3 \Longleftrightarrow n > 2$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = x$.
9. $\forall x < 3,\ x^2 < 9$.
10. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \geqslant n+1$.
11. Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion.
    Si $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n+1) \Rightarrow \mathscr{P}(n)$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ est vraie.
12. Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion.
    Si $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(2n)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n+1) \Rightarrow \mathscr{P}(n)$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ est vraie.
13. Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion.
    Si $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1)$ sont vraies et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(2n)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n+1) \Rightarrow \mathscr{P}(n)$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ est vraie.

1 A, B et C étant trois assertions, étudier la véracité des assertions :

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \vee B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow B\big)$
3. $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \wedge (B \vee C)$
4. $\big(A \vee (\overline{A} \wedge B)\big) \Leftrightarrow (A \vee B)$

2 Soient p, q et r trois assertions. Montrer que

1. $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \Rightarrow r\big)$
2. $\big((p \vee q) \Rightarrow r\big) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\big)$
3. $\left\{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ r \Rightarrow p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p \Leftrightarrow q \\ q \Leftrightarrow r \\ r \Leftrightarrow p \end{array}\right.$
   (c'est-à-dire, plus synthétiquement, $(p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r)$.)

3 Exprimer en langage courant les assertions suivantes, et dire lesquelles sont vraies

$$\bullet x \in \mathbb{N} \bullet y \in \mathbb{N} \bullet z \in \mathbb{N} \quad x = yz$$

où l'on remplacera chaque • par $\forall$ ou $\exists$ (il doit donc y avoir au total $2^3 = 8$ assertions différentes.)

4 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec des quantificateurs

1. La fonction f est nulle.
2. La fonction f s'annule.
3. La fonction f est décroissante.
4. La fonction f n'est pas croissante.
5. La fonction f est majorée par 2.
6. La fonction f est majorée.
7. La suite $(u_n)_n$ est constante.
8. La suite $(u_n)_n$ est stationnaire (constante à partir d'un certain rang).
9. La suite $(u_n)_n$ est croissante.
10. La suite $(u_n)_n$ est bornée.

5 ✎ Donner la négation des propositions suivantes

1. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1$ ou $f(x) \leqslant -1$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0)$

6 Résoudre, sur leur ensemble de définition (à préciser, l'inconnue x étant réelle et l'inconnue z étant complexe) les équations suivantes :

1. $z^2+5z+12=0$
2. $\dfrac{2(x-1)}{x+2} = \dfrac{2x-1}{x-3}$
3. $z^2+8z-5=0$
4. $\sqrt{x^2-4} = x+3$
5. $\sqrt{x^2-4} = -x-3$
6. $|3x+5| = |1-2x|$

7 Résoudre, sur leur ensemble de définition (à préciser) les inéquations suivantes :

1. $-x^2+3x+5<0$
2. $|x-4|>5$
3. $|x+2| \leqslant 1$
4. $x^4+3x^2-1 \geqslant 0$
5. $\sqrt{x^2+x-2} > 3x-4$
6. $x+\dfrac{m}{x} \geqslant 3$ (où m est un paramètre réel)

8 ✎ Si $1 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant 12$, encadrer $x-y$ et $2y-x$.

9 On démontre par récurrence qu'étant donné une boite de $n \in \mathbb{N}^*$ crayons de couleurs, ils sont tous de la même couleur.

- Si $n=1$, c'est immédiat.
- Si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}^*$, soit une boite de $n+1$ crayons, notés $c_1, \dots, c_{n+1}$.
  - ⋆ Les crayons $c_1, \dots, c_n$ sont tous de la même couleur par hypothèse de récurrence.
  - ⋆ Les crayons $c_2, \dots, c_{n+1}$ sont tous de la même couleur par hypothèse de récurrence.

  Donc les crayons $c_1, \dots, c_{n+1}$ sont tous de la même couleur, ce qui établit la récurrence.

Qu'en pensez-vous ?

10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$, $u_1=0$, $u_2=2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n-1)$.

11 Montrer que (sans utiliser les congruences !) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $17^n - 1$ est divisible par 16.

12 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{3\},\ n^2 \leqslant 2^n$.

13 On admet que tout entier $\geqslant 2$ possède un diviseur premier. Montrer que tout entier naturel non nul s'écrit comme produit de nombres premiers.

14 Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ 1+\dfrac{1}{2^2}+\dots+\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$.

Remarque : on peut montrer que le membre de gauche tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

15 Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une fonction affine et d'une fonction nulle 0 et d'intégrale nulle sur $[0,1]$.

Solution de 1 :

(indications)

1. Traduire $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ avec des « ou ». Réponse : Vrai.
2. Idem. Réponse : Vrai.
3. Table de vérité.
4. Réponse : Vrai.

Solution de 1 :

(corrigé)

1. $\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)\big) \Leftrightarrow \left(\overline{A} \vee \left(\overline{B} \vee A\right)\right)$. Cette dernière assertion est toujours vraie car on a toujours A vraie ou $\overline{A}$ vraie.
   Donc $\boxed{A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \text{ est toujours vraie.}}$
2. $\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow B\big) \Leftrightarrow \left(\overline{A \Rightarrow B} \vee B\right) \Leftrightarrow \big((A \wedge \overline{B}) \vee B\big) \Leftrightarrow (A \vee B)$ car $\overline{B} \vee B$ est toujours vrai.
   Donc $\boxed{(A \vee B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow B\big) \text{ est toujours vraie.}}$
3. On note P l'assertion $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \wedge (B \vee C)$. La table de vérité de P est

A	B	C	$B \wedge C$	$B \vee C$	$A \vee (B \wedge C)$	P
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F

4. $\left(A \vee \left(\overline{A} \wedge B\right)\right) \Leftrightarrow \left(A \vee \overline{A}\right) \wedge (A \vee B)$ et on a toujours A vraie ou $\overline{A}$ vraie.
   Donc $\boxed{\left(A \vee \left(\overline{A} \wedge B\right)\right) \Leftrightarrow (A \vee B).}$

Solution de 2 :

(indications)

1. Traduire avec des connecteurs ou, non, et.
2. Idem.
3. Double implication.

Solution de 3 :

(indications) 4 faux, 4 vrais.

Solution de 3 :

(corrigés)

- $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
  Tout nombre entier produit de n'importe quel entier par n'importe quel autre entier.
  $\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : pour $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$, on n'a pas $1 = 2 \times 3$.
- $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
  Tout entier x est divisible par tout entier y.
  $\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : pour $x = 1$, $y = 2$, on ne peut pas trouver $z \in \mathbb{N}$ tel que $1 = 2z$ car $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
- $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
  Le quotient de tout entier x par un entier z est un entier y indépendant de z.
  $\boxed{\text{Faux.}}$ (La négation est $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ \ x \neq yz$) Contre-exemple : pour $x = 1$, pour tout entier y, $1 \neq y \times y$ si $y \neq 1$ (on prend $z = y$), et $1 \neq 1 \times 2$ si $y = 1$ (on prend $z = 2$).
- $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
  Tout nombre entier x est le multiple d'un entier y.
  $\boxed{\text{Vrai.}}$ Il suffit de prendre $x = y$ et $z = 1$.
- $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
  Il existe un entier x tel que tout entier z est le quotient de x par n'importe quel entier y.
  $\boxed{\text{Faux.}}$ Si $x \neq 0$, $x \neq 0 \times 0$; si $x = 0$, $x \neq 1 \times 1$.
- $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
  Il existe un entier x divisible par n'importe quel entier y.
  $\boxed{\text{Vrai.}}$ $x = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
  Il existe deux entiers x et y tel que tout entier z soit le quotient de x par y.
  $\boxed{\text{Vrai.}}$ $x = y = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
  Il existe deux entiers x et y tel que y divise x.
  $\boxed{\text{Vrai.}}$

Solution de 6 :

(réponses)

1. Réponse : $\dfrac{-5 \pm \mathrm{i}\sqrt{23}}{2}$.

2. Réponse : $\dfrac{8}{11}$.
3. Réponse : $-4 \pm \sqrt{21}$.
4. Attention aux équivalences/à la synthèse...
5. ...sinon on a des surprises ici !
6. Réponse : -6 et $-\dfrac{4}{5}$.

Solution de 6 :
(corrigé)

1. On résout sur $\mathbb{C}$. Le discriminant est $\Delta = -23$. Les solutions sont $\boxed{\dfrac{-5 \pm i\sqrt{23}}{2}.}$
2. On résout sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. Il y a une unique solution $\boxed{\dfrac{8}{11}.}$
3. On résout sur $\mathbb{C}$. Le discriminant réduit est $\Delta' = 21$. Les solutions sont $\boxed{-4 \pm \sqrt{21}.}$
4. On résout sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. L'équation est équivalente à $x^2 - 4 = (x+3)^2$ et $x+3 \geqslant 0$. Il y a une unique solution $\boxed{-\dfrac{13}{6}.}$
5. On résout sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. L'équation est équivalente à $x^2 - 4 = (x+3)^2$ et $x+3 \leqslant 0$. Il n'y a $\boxed{\text{pas de solution.}}$
6. On résout sur $\mathbb{R}$. L'équation est équivalente à $(3x+5)^2 = (1-2x)^2$. Les solutions sont $\boxed{-6 \text{ et } -\dfrac{4}{5}.}$

Solution de 7 :
(réponses)

1.
2. Réponse : $]-\infty, -1[\cup]9, +\infty[$.
3. Réponse : $[-3, 1]$.
4. Réponse : $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, +\infty\right[$.
5. Réponse : $]-\infty, -2] \cup [1, 2[$.
6. Réponse : $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \text{si } m \geqslant \frac{9}{4} \\ \left[\frac{3-\sqrt{9-4m}}{2}, 0\right[\cup \left[\frac{3+\sqrt{9-4m}}{2}, +\infty\right[& \text{si } m \leqslant 0 \\ \left]0, \frac{3-\sqrt{9-4m}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{9-4m}}{2}, +\infty\right[& \text{si } 0 \leqslant m \leqslant \frac{9}{4} \end{cases}$

Solution de 7 :
(corrigé)

1. On résout sur $\mathbb{R}$. Le discriminant est $\Delta = 29$. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathbb{R} \setminus \left[\frac{-3-\sqrt{29}}{2}, \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right].}$
2. On résout sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty, -1[\cup]9, +\infty[.}$
3. On résout sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est $\boxed{[-3, 1]}$.
4. On résout sur $\mathbb{R}$. On fait un changement d'inconnue $X = x^2$. Le discriminant est alors $\Delta = 13$.
L'ensemble des solutions est $\boxed{\left]-\infty, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, +\infty\right[.}$
5. On résout sur $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$. Il faut différencier deux cas selon le signe de $3x - 4$. L'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty, -2] \cup [1, 2[.}$
6. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ si $m = 0$, sur $\mathbb{R}^*$ sinon. Il faut alors différencier deux cas selon le signe de x. On se ramène à un trinôme du second degré de discriminant $9 - 4m$. L'ensemble $\mathscr{S}_m$ des solutions est
$$\boxed{S_m = \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \text{si } m \geqslant \frac{9}{4} \\ \left[\frac{3-\sqrt{9-4m}}{2}, 0\right[\cup \left[\frac{3+\sqrt{9-4m}}{2}, +\infty\right[& \text{si } m \leqslant 0 \\ \left]0, \frac{3-\sqrt{9-4m}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{9-4m}}{2}, +\infty\right[& \text{si } 0 \leqslant m \leqslant \frac{9}{4} \end{cases}}$$

Solution de 9 :
(réponse) On ne peut pas passer de $n = 1$ à $n = 2$.

Solution de 10 :
(indication) Récurrence d'ordre 3.

Solution de 11 :
(indication) Récurrence. $17 = 16 + 1$.

Solution de 12 :
(indication) Récurrence.

Solution de 13 :
(indication) Récurrence forte.

Solution de 14 :
(indication) Récurrence. Pour comparer deux nombres, on peut étudier.....

Solution de 15 :
(indication) Raisonner par analyse-synthèse.
On doit trouver que la fonction affine est $x \mapsto 2\left(\int_0^1 f - f(0)\right)x + f(0)$.