Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 3

Exercice 1 : Autour des produits infinis (CCP MP 2002)

1. Si $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $P_n \to \ell \neq 0$ donc $u_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \to \dfrac{\ell}{\ell} = 1$: $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers 1.}}$

2. (a) Comme $u_n \to 1 > 0$, une propriété sur les limites nous dit qu' $\boxed{\text{il existe un rang } n_0 \text{ à partir duquel } u_n > 0.}$

   (b) Comme, pour $n \geqslant n_0$, $\prod_{p=0}^{n} u_p = \prod_{p=0}^{n_0-1} u_p \prod_{p=n_0}^{n} u_p$, avec $\prod_{p=0}^{n_0-1} u_p \neq 0$, on a bien $\boxed{\prod_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \prod_{n\geqslant n_0} u_n \text{ sont de même nature.}}$

3. (a) $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si P_n a une limite strictement positive si et seulement si $\ln P_n$ converge.

   Or $\ln P_n = \sum_{p=0}^{n} \ln u_p$, donc $\boxed{\prod_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge si et seulement si } \sum_{n\geqslant 0} \ln u_n \text{ converge.}}$

   (b) Comme pour tout $n \geqslant 0$, $1 + u_n > 0$, on peut utiliser la question précédente : $\prod_{n\geqslant 0} (1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Or si $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge, alors $\ln(1+u_n) \to 0$ donc $u_n \to 0$ (par continuité de l'exponentielle) et donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$.

   Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

   Si, réciproquement, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ et toujours avec $\ln(1+u_n) \sim u_n$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Finalement, $\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 0} (1+u_n) \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}}$

   (c) On reprend les mêmes arguments avec cette fois $1 - u_n > 0$ et avec $u_n \to 0$, $\ln(1-u_n) \sim -u_n$ équivalent dans lequel les termes sont négatifs, donc le critère de comparaison reste valable (quitte à tout multiplier par -1).

   $\boxed{\text{Le produit infini } \prod_{n\geqslant 0} (1-u_n) \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}}$

4. (a) Le théorème spécial sur des séries alternés s'applique : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tend vers 0 en décroissant. Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2} u_n \text{ converge.}}$

   (b) Pour tout $n \geqslant 2$, $1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geqslant 1 + \dfrac{-1}{\sqrt{n}} \geqslant 1 + \dfrac{-1}{\sqrt{2}} > 0$, donc d'après la question 3.a, $\prod_{n\geqslant 1} (1+u_n)$ a même nature que $\sum_{n\geqslant 2} \ln(1+u_n)$.

   Mais comme $u_n \to 0$, $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(u_n^2\right) = u_n - \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) = u_n - v_n$ où $v_n = \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n} > 0$.

   Par comparaisons des séries à termes positifs, comme la série harmonique diverge (série de Riemann, voir aussi la question 6.a), $\sum v_n$ diverge et comme on sait déjà que $\sum u_n$ converge, on en déduit que $\sum \ln(1+u_n)$ diverge.

Finalement, $\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 1}(1+u_n) \text{ diverge.}}$

Ainsi, $\boxed{\text{le résultat de la question 3.b ne tient plus si } (u_n) \text{ n'est pas de signe constant.}}$

---

5. (a) Comme $0 < \dfrac{1}{4n^2} < 1$, la question 3.c s'applique, et $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right)$ a même nature que $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{4n^2}$ qui est, au cœfficient multiplicatif $\dfrac{1}{4}$ près une série de Riemann convergente (avec $2>1$). Donc $\boxed{\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right) \text{ converge.}}$

(b) Même argument en remarquant que la condition $x\in]-\pi,\pi[$ donne, pour $x\neq 0$, $0<1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}<1$, car $0<x^2<\pi^2\leqslant n^2\pi^2$. Pour $x=0$, la convergence du produit ne pose pas de problème (produit constant 1).

$\boxed{\text{Pour tout } x\in]-\pi,\pi[,\ \prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \text{ converge.}}$

(c) Si $x>0$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}>0$, donc d'après la question 3.a, $\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ a même nature que $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right)$.

Or $\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right)=-\dfrac{x}{n}+\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)=-\dfrac{x}{n}+\dfrac{x}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme $\dfrac{1}{n^2}$ est un terme général positif de série de Riemann convergente, $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement, $\boxed{\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \text{ converge pour tout } x\in]0,+\infty[.}$

---

6. (a) D'après la question 3.b, la série harmonique (dont le terme général est bien strictement positif) a même nature que le produit infini de terme général $1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+1}{n}$. On reconnaît un produit télescopique : $P_n=\prod_{p=1}^{n}\dfrac{p+1}{p}=\dfrac{n+1}{1}=n+1\to+\infty$.

Donc $\boxed{\text{la série harmonique diverge.}}$

(b) Il s'agit d'une série géométrique convergente car $\left|\dfrac{1}{p}\right|<1$, donc $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p^k}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{p}}=\dfrac{p}{p-1}.}$ (mais vu la suite, c'est la forme non simplifiée qui va nous être utile.)

(c) L'argument développé par Euler est le suivant : en considérant le « produit partiel » $P_n=\prod_{\ell=1}^{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_\ell}}$ et en utilisant le fait que $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_\ell}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{{p_\ell}^k}$, on « obtient » que P_n et la somme de l'inverse de tous les nombres entiers admettant comme seuls diviseurs premiers éventuels $p_1,p_2,\dots,p_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient la somme de l'inverse de tous les entiers, et comme la série harmonique diverge (6.a), le produit infini $\prod_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$ diverge : $P_n\to+\infty$.

Mais alors $\dfrac{1}{P_n}\to 0$, donc $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)$ diverge également.

Enfin, d'après la question 3.c, avec $0<\dfrac{1}{p_n}<1$, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{p_n} \text{ diverge.}}$

Cela suffit sans doute pour avoir tous les points le jour du concours.

Si l'on veut être plus rigoureux que ne l'est Euler, en utilisant la même idée, on peut remarquer que $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_\ell}} \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{{p_\ell}^k}$ donc (tout est positif), $P_n \geqslant \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k_\ell=0}^{n}\frac{1}{p_\ell^{k_\ell}}\right) = \sum_{0\leqslant k_1,\dots,k_n\leqslant n}\left(\prod_{\ell=1}^{n}\frac{1}{p_\ell^{k_\ell}}\right) = \sum_{0\leqslant k_1,\dots,k_n\leqslant n}\frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n} p_\ell^{k_\ell}} \geqslant \sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q} = H_n$ car la décomposition primaire des q entre 1 et n ne fait intervenir que des nombres premiers entre p_1 et $n \leqslant p_n$ avec des exposants entre 0 et $\log_2 n \leqslant n$, donc les $\dfrac{1}{q}$ sont certains des termes apparaissant dans la grosse somme.

La suite du sujet permet entre autre de calculer le produit infini de 5.b.

Exercice 2 : Étude de normes matricielles (CCP PC 2002)

I.1 Le théorème de d'Alembert-Gauß assure que tout polynôme complexe non constant est scindé, ce qui, appliqué à n'importe quel polynôme annulateur de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (comme le polynôme caractéristique par Cayley-Hamilton, ou le polynôme minimal), assure la trigonalisabilité de A.

I.2 **a)** On calcule

$$\begin{aligned}
\chi_G = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ -1 & X+1 & -1 \\ -2 & 5 & X-3 \end{vmatrix} &= +\begin{vmatrix} -1 & X+1 & -1 \\ -2 & 5 & X-3 \\ X-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&= \begin{vmatrix} -1 & X+1 & -1 \\ 0 & 3-2X & X-1 \\ 0 & X^2-2 & 1-X \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + (X-1)L_1 \\
&= \begin{vmatrix} -1 & X+1 & -1 \\ 0 & 3-2X & X-1 \\ 0 & X^2-2X+1 & 0 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&= (X-1)^3
\end{aligned}$$

en reconnaissant un déterminant triangulaire par blocs.

Alors $\operatorname{Sp} G = \{1\}$ et G n'est pas diagonalisable sinon on pourrait écrire $G = PI_3P^{-1} = I_3$.

b) Comme revu en première question, G est cependant trigonalisable donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car la seule valeur propre est 1.

On cherche donc à montrer que G est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
On cherche une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$.

Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_3)$ donc avec $e_1 = (1, 0, -1)$ convient.

Puis, en écrivant $e_2 = (x, y, z)$, on veut $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soit $(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x-2y+z \\ 2x-5y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $e_2 = (1, 1, 1)$ convient.

Enfin, en écrivant $e_3 = (x, y, z)$, on veut $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soit $(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x-2y+z \\ 2x-5y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $e_3 = (3, 1, 0)$ convient.

Reste à vérifier que (e_1, e_2, e_3) est bien une base de $\mathbb{C}^3$ ce qui se fait en calculant le déterminant (on fait $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \neq 0.$$

Par formule de changement de base (de la base canonique vers $\mathscr{B}$), on a alors $\boxed{G = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

matrice de passage de la base canonique vers $\mathscr{B}$ et $\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

I.3 Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et les cœfficients diagonaux sont les produits des cœfficients diagonaux correspondants.

Ainsi, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, (à poser, c'est la première), si $T = \begin{pmatrix} t_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_n \end{pmatrix}$ alors $\boxed{T^k = \begin{pmatrix} t_1^k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_n^k \end{pmatrix}}$.

Remarque : c'est encore vrai pour $k = 0$, voir pour $k < 0$ si T est inversible.

I.4 A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable : $A = PTP^{-1}$ où P est inversible et T est triangulaire.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PT^kP^{-1}$ donc les valeurs propres de A^k qui se situent sur la diagonale de la matrice triangulaire T^k sont les λ^k pour $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ d'après la question précédente.

Alors $\rho\left(A^k\right) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \left|\lambda^k\right| = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} |\lambda|^k = \left(\max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} |\lambda|\right)^k = \left(\rho(A)\right)^k$ par croissance de $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}^+$. $\boxed{\rho\left(A^k\right) = \left[\rho(A)\right]^k.}$

I.5 ψ est une norme, c'est du cours ou presque (quitte à confondre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^{2n}$), voir cours, donc.

On a pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\psi(AB) = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} \left|\sum\limits_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,,j}\right|$ avec $\left|\sum\limits_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,,j}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^n \left|a_{i,k}\right|\left|b_{k,,j}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^n \psi(A)\psi(B) = n\psi(A)\psi(B)$ (*)
donc $\psi(AB) \leqslant n\psi(A)\psi(B)$ en général.
On trouve un contre-exemple avec $n > 1$ pour lequel on n'a pas $\psi(AB) \leqslant \psi(A)\psi(B)$. On propose les matrices diagonales par blocs $A = \begin{pmatrix} A_1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ avec $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Alors $AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ donc $\psi(A) = \psi(B) = 2$ et $\psi(AB) = 1$.
Pour un cas d'égalité dans (*), on peut aussi, vu l'inégalité triangulaire, prendre $A = B = U$ matrice dont tous les cœfficients valent 1.

I.6 Soit φ une norme matricielle. Comme on est en dimension finie, φ est équivalente à N. On a donc des réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\varphi \leqslant N \leqslant \beta\varphi$.

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$. $\boxed{N(AB)} \leqslant \beta\varphi(AB) \leqslant \beta\varphi(A)\varphi(B) \boxed{\leqslant \dfrac{\beta}{\alpha^2} N(A)N(B)}$: $C = \dfrac{\beta}{\alpha^2}$ convient.

I.7 Vu l'équivalente des norme, on peut utiliser n'importe quelle norme, en particulier une matricielle φ (l'énoncé nous dit qu'il en existe.) L'utilisation d'une norme quelconque ajouterait seulement une constante C vu la question précédente.
Or $\varphi(P^{-1}A_kP - P^{-1}AP) = \varphi(P^{-1}(A_k - A)P) \leqslant \varphi(P^{-1})\varphi(A_k - A)\varphi(P)$ avec $\varphi(P^{-1}) \neq 0$ et $\varphi(P) \neq 0$ car P et P^{-1} sont non nulles car elles sont inversibles.

Ainsi, si la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A alors $\varphi(A_k - A) \to 0$ donc $\varphi(P^{-1}A_kP - P^{-1}AP) \to 0$ d'où la suite $\left(P^{-1}AP\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.

Réciproquement, si $\left(P^{-1}AP\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$, alors $\left(PP^{-1}APP^{-1}\right)_{k \in \mathbb{N}} =$ $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $PP^{-1}APP^{-1} = A$ d'après ce qu'on vient de faire.

I.8 **a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$T = \lambda I_2 + U$ où $U = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $U^2 = 0_2$. Comme U commute avec λI_2, par le binôme de Newton,

$T^k = \binom{k}{0}\lambda^k I_2 + \binom{k}{1}\lambda^{k-1}U = \lambda^k I_2 + k\lambda^{k-1}U$ donc $\boxed{T^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.}$

Puis (T^k) converge si et seulement les suites formées par les cœfficients convergent (coordonnées dans une base) si et seulement si (λ^k) et $(k\lambda^{k-1}\mu)$ convergent.
Or (λ^k) converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.
Dans le premier cas, $\lambda^k \to 0$ et par croissances comparées $k\lambda^{k-1}\mu \to 0$.
Dans le second cas, $(k\lambda^{k-1}u) = (k\mu)$ converge si et seulement si $\mu = 0$.

Finalement, $\boxed{(T^k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ converge si et seulement si } (|\lambda| < 1) \text{ ou } (\lambda = 1 \text{ et } \mu = 0)}$ (et la limite est respectivement 0_2 et I_2).

b) Si A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

D'après la question 7, (A^k) converge si et seulement si (D^k) converge or $D^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix}$ donc

$\boxed{(A^k) \text{ converge si et seulement si } (|\lambda| < 1 \text{ ou } \lambda = 1) \text{ et } (|\mu| < 1 \text{ ou } \mu = 1)}$ où $\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda, \mu\}$.

c) Si A n'est pas diagonalisable, elle est trigonalisable et ne possède qu'une valeur propre λ donc est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et d'après 7 et 8.a, (A^k) converge si et seulement si $(|\lambda| < 1)$ ou $(\lambda = 1 \text{ et } \mu = 0)$. Le deuxième cas est en fait à exclure car A n'est pas diagonalisable.

Finalement, $\boxed{(A^k) \text{ converge si et seulement si } \rho(A) = |\lambda| < 1.}$ De plus, dans ce cas, $T^k \to 0_2$ donc $\boxed{A^k \to 0_2.}$

d) Finalement, avec les deux questions précédentes, dans le cas diagonalisable, $A^k \to 0_2$ si et seulement si $|\lambda| < 1$ et $|mu < 1|$ et dans le cas non diagonalisable, si et seulement si $|\lambda| < 1$.

Dans tous les cas, $\boxed{A^k \to 0_2 \text{ si et seulement si } \rho(A) < 1.}$

Partie II

II.1 **a)** Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|(AX)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) N_\infty(X) \leqslant M_A N_\infty(X)$.

Et donc $\boxed{N_\infty(AX) \leqslant M_A N_\infty(X).}$

b) En dimension finie, les normes sont équivalentes, on a donc $\alpha, \beta > 0$ tel que $\alpha N_\infty \leqslant N \leqslant \beta N_\infty$.

Alors $N(AX) \leqslant \beta M_A N_\infty(X) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} M_A N_\infty(X)$. Donc $\boxed{N(AX) \leqslant C_A N(X) \text{ avec } C_A = \dfrac{\beta}{\alpha} M_A.}$

c) $\left\{\dfrac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée d'après la question précédente (par C_A) $\boxed{\text{d'où l'existence de la borne supérieure.}}$

d) Avec $N = N_\infty$, on peut prendre $\alpha = \beta = 1$ et alors $C_A = M_A$ et donc $\boxed{\widetilde{N_\infty}(A) \leqslant M_A.}$

e) On choisit $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ de norme infinie égale à 1 et alors $GX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ de norme infinie égale à 10.

On calcule aussi $M_G = \max(2, 3, 10) = 10$. On a donc $\widetilde{N_\infty}(G) \leqslant M_G = 10$ et $\dfrac{N_\infty(GX_0)}{N_\infty(X_0)} = 10$ donc, finalement, $\boxed{\widetilde{N_\infty}(G) = 10.}$

II.2 On calcule $\dfrac{N_\infty(AY_0)}{N_\infty(Y_0)} = N_\infty(AY_0) \leqslant M_A$ d'après **1.a** et $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} y_j\right| = \left|\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ a_{i_0,j} \neq 0}} a_{i_0,j} \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}\right| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$ d'où $\dfrac{N_\infty(AY_0)}{N_\infty(Y_0)} = M_A \leqslant \widetilde{N_\infty}(A)$ et avec la question **1.d**, $\boxed{\widetilde{N_\infty}(A) = M_A.}$

II.3 **a)** $\boxed{\text{Si } A = 0_n,}$ alors pour tout $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\dfrac{N(AX)}{N(X)} = 0$ donc $\boxed{\tilde{N}(A) = 0}$.

$\boxed{\text{Si réciproquement } \tilde{N}(A) = 0,}$ alors pour tout $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\dfrac{N(AX)}{N(X)} \leqslant 0$ donc $\dfrac{N(AX)}{N(X)} = 0$ donc $N(AX) = 0$ donc $AX = 0$ car N est une norme. Mais en prenant les vecteurs de la base canonique pour X, on obtient que les colonnes de A sont nulles et finalement $\boxed{A = 0_n.}$

---

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\dfrac{N(\lambda AX)}{N(X)} = |\lambda| \dfrac{N(AX)}{N(X)} \leqslant |\lambda|\, \tilde{N}(A)$ par homogénéité de N, donc $\boxed{\tilde{N}(\lambda A) \leqslant |\lambda|\, \tilde{N}(A).}$

---

c) Si $\lambda = 0$, il n'y a pas de problème.

Sinon, d'après la question précédente, $\tilde{N}\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\right) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| \tilde{N}(\lambda A)$. Donc $\tilde{N}(\lambda A) \geqslant |\lambda|\, \tilde{N}(A)$. Finalement, $\boxed{\tilde{N}(\lambda A) = |\lambda|\, \tilde{N}(A).}$

---

d) Pour tout $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\dfrac{N((A+B)X)}{N(X)} = \dfrac{N(AX+BX)}{N(X)} \leqslant \dfrac{N(AX)+N(BX)}{N(X)} \leqslant \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$ par inégalité triangulaire sur N, donc $\boxed{\tilde{N}(A+B) \leqslant \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B).}$

---

e) La définition de $\tilde{N}(A)$ ainsi que le cas évident $X = 0$ donnent directement $\boxed{\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leqslant \tilde{N}(A) N(X).}$

---

f) $\tilde{N}$ est bien définie, positive puis défini-positive par **a**, homogène par **c** et vérifie l'inégalité triangulaire par **d**. $\boxed{\text{C'est une norme.}}$

Fin