Corrigé du Devoir Libre n° 4

Exercice :

1.a) $\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1.b) $\boxed{\text{Vrai.}}$ Si la série $\sum u_n$ converge absolument, $u_n \to 0$, donc à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant 1$, donc $0 \leqslant u_n^2 \leqslant |u_n|$ donc la série $\sum u_n^2$ converge par comparaison.

1.c) $\boxed{\text{Vrai.}}$ Si la série $\sum u_n$ converge, $u_n \to 0$ donc $\dfrac{1}{u_n} \not\to 0$ donc la série $\sum 1/u_n$ diverge grossièrement.

1.d) $\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n}$.

1.e) $\boxed{\text{Faux.}}$ $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \to \frac{1}{2} \neq 1$.

1.f) $\boxed{\text{Vrai.}}$ $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{(n+1)^2}$ puis $N \to \infty$ (les séries convergent bien).

2.a) $\boxed{\sum \dfrac{n!}{(2n)!} \text{ converge}}$ par critère de d'Alembert.

2.b) $\boxed{\sum \dfrac{1}{2^n + 3^n} \text{ converge}}$ car $u_n \sim \dfrac{1}{3^n}$ terme général positif d'une série géométrique convergente.

2.c) $\boxed{\sum \dfrac{2^n + n}{n2^n} \text{ diverge}}$ car $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ terme général positif de série de Riemann divergente.

2.d) $\boxed{\sum \dfrac{2^n + n}{n^2 2^n} \text{ converge}}$ car $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ terme général positif de série de Riemann convergente.

2.e) $\boxed{\sum \dfrac{\cos(n)(n+1)}{\ln n\sqrt{n^6+2n+3}} \text{ converge}}$ car $u_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{n+1}{\ln n\sqrt{n^6+2n+3}}\right)$ et $\dfrac{n+1}{\ln n\sqrt{n^6+2n+3}} \sim \dfrac{1}{n^2 \ln n}$ terme général positif de série convergente car $\dfrac{1}{n^2\ln n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ terme général positif de série de Riemann convergente.

2.f) $\boxed{\sum \dfrac{n^2+1}{\ln n\sqrt{n^6+2n+3}} \text{ diverge}}$ car $u_n \sim \dfrac{1}{n \ln n} \geqslant 0$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ décroît vers 0, on peut faire une comparaison série-intégrale et $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \to +\infty$. Donc $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ puis $\sum u_n$ divergent.

2.g) $\boxed{\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \text{ converge}}$ car $u_n = \sin\left(n\pi\left(1 + \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Le premier terme est le terme général d'une série semi-convergente par Théorème Spécial sur les Séries Alternées, le second est le terme général d'une série absolument convergente par comparaison.

Problème : TPC - CCP - 2013

Cas où $\alpha > 1$

1. $\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ donc $\boxed{\text{la série est convergente}}$ car absolument convergente par comparaison à une série de Riemann.

Cas où α appartient à $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$

2.a) Changement de variable $y = \sqrt{t}$.

2.b) Intégration par parties.

2.c) $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \left|\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\right| \mathrm{d}y$ est croissante comme primitive de fonction positive, $\left|\dfrac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\right| \leqslant \dfrac{1}{y^{2\alpha}}$ et

$$\int_1^x \frac{1}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{x^{2\alpha-1}}\right) \to \frac{1}{2\alpha-1}$$

en $+\infty$ (car $2\alpha - 1 > 0$) en croissant, on en déduit que $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \left|\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\right| \mathrm{d}y$ est croissante et majorée, donc $\boxed{x \mapsto \displaystyle\int_1^x \left|\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\right| \mathrm{d}y \text{ converge en } +\infty.}$

2.d) Comme $\dfrac{\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}^{2\alpha-1}} \to 0$ en $+\infty$, d'après les deux précédentes questions, $\boxed{x \mapsto \displaystyle\int_1^x \phi(t)\,dt \text{ l'est aussi.}}$

3.a) ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ par opérations et pour tout t,

$$\boxed{\phi'(t) = \frac{\pi\sqrt{t}\cos(\pi\sqrt{t}) - 2\alpha\sin(\pi\sqrt{t})}{2t^{\alpha+1}}}$$

3.b) Si $t \in [1, +\infty[$, par inégalité triangulaire,

$$|\phi'(t)| \leqslant \frac{\pi\sqrt{t} + 2\alpha}{2t^{\alpha+1}} \leqslant \frac{(\pi + 2\alpha)\sqrt{t}}{2t^{\alpha+1}} \leqslant \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{t^{\alpha+1/2}}$$

3.c) Si $(a,b) \in [1, +\infty[^2$ vérifiant $a < b$, on a

$$|\phi(a) - \phi(b)| = \left|\int_a^b \phi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\phi'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \frac{K}{t^{\alpha+1/2}}\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_a^b \frac{K}{a^{\alpha+1/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}|a-b|.$$

(On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis.)

4.a) Par la relation de Chasles, $\boxed{V_N = \displaystyle\int_1^{N+1} \phi(t)\,\mathrm{d}t.}$

4.b) D'après la question précédente et la question **2**, $\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n \text{ converge.}}$

5.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $n < n+1$, en utilisant **3.c**,

$$\begin{aligned}|u_n - v_n| = \left|\int_n^{n+1} (\phi(n)-\phi(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_n^{n+1} |\phi(n)-\phi(t)|\,\mathrm{d}t &\leqslant \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\int_n^{n+1}(t-n)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\int_n^{n+1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Donc $\boxed{|u_n - v_n| \leqslant \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.}$

5.b) Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\boxed{\sum_{n\geq 1}(u_n - v_n) \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

6. Comme $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} = u_n = (u_n - v_n) + v_n$ est la somme de deux termes généraux de séries convergentes, $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \text{ converge.}}$

Cas $\alpha = \frac{1}{2}$

7.a) On a $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)}-1\right) = e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)}-1\right)$, ce qui avec un peu de calcul et de dextérité permet d'obtenir

$$\boxed{\delta_n = \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} - \frac{i\pi\left(\pi^2+6\right)e^{i\pi\sqrt{n}}}{48n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).}$$

7.b) En passant à la partie réelle, en notant que

$$\mathfrak{Re}\left(\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}\right) = \frac{\mathfrak{Re}(\varepsilon_n)}{n^{3/2}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

(avec $\varepsilon_n \to 0$ donc $\mathfrak{Re}(\varepsilon_n) \to 0$). On obtient

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = -\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\sin(\pi\sqrt{n}) - \frac{\pi^2}{8n}\cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{\pi\left(\pi^2+6\right)}{48n^{3/2}}\sin(\pi\sqrt{n}) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc

$$\boxed{\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\right) - \frac{\pi}{4n}\cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{(\pi^2+6)}{24n^{3/2}}\sin(\pi\sqrt{n}) + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).}$$

8.a) Comme $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}} \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

Si $w_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, on a de même que $\boxed{\sum_{n\geq 1} w_n \text{ converge.}}$

8.b) Soit $\alpha_n = \cos(\pi\sqrt{n})$. Alors $\alpha_{4n^2} = 1$ et $\alpha_{(2n+1)^2} = -1$ donc la suite $\boxed{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\cos(\pi\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est divergente .}}$

8.c) D'après les questions précédentes, $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est la somme de termes généraux de séries convergentes et d'UN terme général de série (télescopique) divergente, donc $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$

Cas $\alpha < \frac{1}{2}$

9. Soit N supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}n^{\alpha-1/2} = \sum_{n=1}^{N}(S_n - S_{n-1})n^{\alpha-1/2} \\ &= \sum_{n=1}^{N}S_n n^{\alpha-1/2} - \sum_{n=0}^{N-1}S_n(n+1)^{\alpha-1/2} \\ &\boxed{= \sum_{n=1}^{N}S_n\left(n^{\alpha-1/2}-(n+1)^{\alpha-1/2}\right) + S_N(N+1)^{\alpha-1/2}}\end{aligned}$$

On dit qu'on a effectué une **transformation d'Abel**, équivalent discret de l'intégration par partie. ($\int \leftrightarrow \sum$ et $f' \leftrightarrow u_{n+1} - u_n$.)

10. $\alpha < 1/2$ et comme (S_n) converge, elle est bornée. Donc $S_n\left(n^{\alpha-1/2}-(n+1)^{\alpha-1/2}\right) = \mathrm{O}\left(n^{\alpha-1/2}-(n+1)^{\alpha-1/2}\right)$ qui est le terme général d'une série (télescopique) positive convergente, donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1}S_n\left(n^{\alpha-1/2}-(n+1)^{\alpha-1/2}\right) \text{ est convergente.}}$

11. Comme $S_N(N+1)^{\alpha-1/2} \to 0$ et vu les deux questions précédentes, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ est convergente.}}$

12. C'est contradictoire avec la partie précédente. Donc $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \text{ diverge.}}$

Fin