Devoir Libre n° 3 : Maths 2 Centrale PSI 2019

1. Premiers résultats

1. $\boxed{\text{Un endomorphisme nilpotent d'indice 1 est nul.}}$

A. Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

2. Par définition de l'indice de nilpotence, $u^{p-1} \neq 0$ donc $\boxed{\text{il existe } x \in E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$

3. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E$.
En composant par u^{p-1}, on obtient $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0_E$ donc $\lambda_0 = 0$ car $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.
En composant ensuite par $u^{p-2}, \dots, u, \mathrm{id}_E$, on obtient successivement $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$.

Donc $\boxed{\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \text{ est libre.}}$

Donc $p \leqslant \dim E = 2$. Comme on a supposé $p \geqslant 2$, $\boxed{p = 2.}$

4. Comme $u^2 = u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a déjà que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$.
Puis, par théorème du rang, $\mathrm{Im}\, u = 2 - \dim \mathrm{Ker}\, u$. Or $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $p = 2$, donc $\dim \mathrm{Ker}\, u \leqslant 1$ et u est nilpotent donc ne peut pas être bijectif donc $\dim \mathrm{Ker}\, u \geqslant 1$. Finalement, $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u = 1$.

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u.}$

5. La famille $(x, u(x))$ de la question 3 est libre et contient $2 = n$ vecteurs : c'est une base de E.

$\boxed{\text{La matrice de } u \text{ dans cette base est bien } J_2.}$

6. Ainsi, toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est soit nulle (si $p = 1$), soit semblable à J_2 (si $p = 2$). Dans les deux cas, on obtient des matrices de trace et de déterminant nuls (ce sont des invariants de similitude).
Si, réciproquement, une matrice est de trace et de déterminant nul, son polynôme caractéristique est X^2, et donc, par le théorème de Cayley-Hamilton, elle est nilpotente.

$\boxed{\text{Finalement, les matrices nilpotentes de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.}}$

B. Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

7. Comme on a toujours $u^2 = u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a toujours $\boxed{\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u.}$

Puis, avec le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, u = n - r \geqslant \dim \mathrm{Im}\, u = r$ donc $\boxed{2r \leqslant n.}$

8. Soit $(y_1, \dots, y_r)$ une base de $\mathrm{Im}\, u$. On a donc $(e_1, \dots, e_r)$ tel que pour tout i, $y_i = u(e_i)$.
Montrons que $(e_1, u(e_1), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E.
Si on a $\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_r, \mu_r \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) = 0_E$, alors en composant par u, comme $u^2 = 0$, $\lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_r u(e_r) = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r = 0_E$ et comme $(y_1, \dots, y_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$ donc libre, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Il reste alors $\mu_1 u(e_1)+\dots+\mu_r u(e_r)=0_E$ et on conclut de même que $\mu_1=\ldots=\mu_r=0$. Finalement, $(e_1,u(e_1),\ldots,e_r,u(e_r))$ est libre et comme $\operatorname{Im} u=\operatorname{Ker} u$, $n=2r=\dim E$ et donc $\boxed{(e_1,u(e_1),\ldots,e_r,u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$

9. Comme $\operatorname{Vect}(e_i,u(e_i))$ est stable par u, la matrice dans cette base est diagonale par blocs. $\boxed{\text{Il s'agit de } \operatorname{diag}(J_2,\ldots,J_2)}$ (avec r blocs diagonaux).

10. Soit $(y_1,\ldots,y_r)$ une base de $\operatorname{Im} u$. On a donc $(e_1,\ldots,e_r)$ tel que pour tout i, $y_i=u(e_i)$.
Comme $\operatorname{Im} u\subset\operatorname{Ker} u$, $(y_1,\ldots,y_r)$ est une famille libre de vecteurs de $\operatorname{Ker} u$ qui est de dimension $n-r$. On peut donc la compléter avec $n-2r$ autres vecteurs $v_1,\ldots,v_{n-2r}$ de $\operatorname{Ker} u$.

    On montre que $\boxed{(e_1,u(e_1),\ldots,e_r,u(e_r),v_1,\ldots,v_{n-2r}) \text{ est une base de } E.}$ En effet, elle contient n vecteurs et si on se donne des scalaires $\lambda_1,\mu_1,\ldots,\lambda_r,\mu_r,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2r}\in\mathbb{C}$ tels que

$$\lambda_1 e_1+\mu_1 u(e_1)+\dots+\lambda_r e_r+\mu_r u(e_r)+\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_{n-2r}v_{n-2r}=0_E,$$

    alors comme dans la question 8, en composant par u, on obtient $\lambda_1=\ldots=\lambda_r=0$ car $(y_1,\ldots,y_r)$ est libre puis il reste $\mu_1 y_1+\dots+\mu_r y_r+\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_{n-2r}v_{n-2r}=0_E$ ce qui donne $\mu_1=\dots=\mu_r=\alpha_1=\dots=\alpha_{n-2r}=0$ car on a une base de $\operatorname{Ker} u$.

11. Comme dans la question 9, $\boxed{\text{la matrice dans cette base est } \operatorname{diag}(J_2,\ldots,J_2,O_{n-2r})}$ avec r blocs J_2.

C. Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

12. Si A est nilpotente, elle admet un polynôme annulateur de la forme X^p, dont les valeurs propres sont parmi les racines : 0 est la seule valeur propre possible. Comme on est dans $\mathbb{C}$, $\operatorname{Sp} A\neq\varnothing$.

    Finalement, $\boxed{\operatorname{Sp} A=\{0\}.}$

13. Si de plus A est diagonalisable, alors la matrice diagonale à laquelle A est semblable est nulle et donc $\boxed{A=0_n.}$

14. Si le polynôme caractéristique est X^n, le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que A est bien nilpotente.

    Si A est nilpotente, comme $\operatorname{Sp} A=\{0\}$, $\chi_A=X^n$. Finalement, $\boxed{A \text{ est nilpotente si et seulement si } \chi_A=X^n.}$

15. Si 0 est l'unique valeur propre de A, le polynôme caractéristique (scindé car dans $\mathbb{C}$) est X^n et donc d'après la question précédente, $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$

16. Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur sa diagonale. Donc si celle-ci est nulle, 0 est la seule valeur propre et $\boxed{\text{la matrice est nilpotente.}}$

    Si A est nilpotente, elle est trigonalisable (on est dans C ou bien χ_A est scindé) et $\operatorname{Sp} A=\{0\}$ donc $\boxed{\text{elle est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$

17. Si A est nilpotente d'indice p, $A^p=0_n$ donc si $P\in\mathbb{C}[X]$ s'écrit $P=X^pQ$, $\boxed{P(A)=A^pQ(A)=0_n.}$

18. Les valeurs propres étant parmi les zéros des polynômes annulateurs, $\boxed{0 \text{ est racine de } P.}$

19. $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$ avec $a_0 = Q(0) \neq 0$.
Donc $Q(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d$. Or A est semblable à une matrice triangulaire R à diagonale nulle, donc $Q(A)$ est semblable à une matrice triangulaire dont la diagonale ne contient que des $a_0 \neq 0$, donc $Q(A)$ est inversible.

Autre rédaction possible : comme Q est scindé, il s'écrit sous la forme $Q = \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$ (les λ_k sont ses racines comptées avec multiplicité). Alors $Q(A) = \prod_{k=1}^{d} (A - \lambda_k I_n)$ et pour tout k, $A - \lambda_k I_n$ est inversible car la seule valeur propre de A est 0 qui n'est pas racine de Q. Donc $Q(A)$ est inversible.

Mais alors, de $P(A) = 0_n = A^m Q(A)$ on déduit $A^m = 0$ et donc que $m \geqslant p$. Finalement, $\boxed{X^p \text{ divise bien } P.}$

D. Racines carrées de matrices nilpotentes.

20. $\boxed{\operatorname{tr} A = 0}$ et les trois colonnes étant colinéaires non nulles, $\boxed{\operatorname{rg} A = 1.}$ Ainsi, $\operatorname{tr} A = \det A = 0$ et par la question 6, $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$ D'après la question 14, $\boxed{\chi_A = X^3.}$ On calcule $A^2 = 0_3$ donc $\boxed{\text{l'indice de nilpotence est 2.}}$

21. D'après I.B, comme $\operatorname{Im} u \neq \operatorname{Ker} u$ (le premier est de dimension 1, le second de dimension 2), la question 11 nous dit que $\boxed{A \text{ est semblable à } \operatorname{diag}(J_2, J_1)}$ et en raisonnant matriciellement, la question 10, nous dit qu'il suffit de prendre une base de $\operatorname{Im} A$: $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ par exemple, et de la compléter en une base de de $\operatorname{Ker} A$. Vu que dans A, par exemple, $3C_1 - C_2 = 0$, $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ est n'est pas colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, donc $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker} u$ et avec $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, une base de réduction est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$. On peut donc choisir $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 2 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}.}$

22. On a $\rho^2 = u$ donc $\boxed{\rho \text{ est nilpotent}}$ et comme ρ est un polynôme en u, il commute avec u donc $\boxed{\operatorname{Im} u \text{ et } \operatorname{Ker} u \text{ sont stables par } \rho.}$

23. Les deux derniers vecteurs de la base de réduction des questions précédentes était constituée de vecteurs de $\operatorname{Ker} u$, et le vecteur centrale formant une base de $\operatorname{Im} u$, qui sont stables par ρ, donc dans cette base, la matrice de ρ est de la forme $R' = P^{-1}RP = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\b & c & d\\e & 0 & g\end{pmatrix}$. On calcule alors $R'^2 = \begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0\\ab+bc+de & c^2 & d(c+g)\\e(a+g) & 0 & g^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc $a = c = g = 0$ et $de = 1$, donc R' de la forme $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\b & 0 & d\\d^{-1} & 0 & 0\end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}^*$.

Réciproquement, ces matrices sont bien racines de $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

On en déduit et on calcule à la machine que les racines de A sont exactement les matrices

$$\boxed{R = PR'P^{-1} = \begin{pmatrix}b+3/d & 3(b+3/d)-d & -7(b+3/d)+2d\\2b-1/d & 3(2b-1/d)-2d & -7(2b-1/d)+4d\\b & 3b-d & -7b+2d\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1 & 3 & -7\\2 & 6 & -8\\1 & 3 & -7\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\0 & -2 & 4\\0 & -1 & 2\end{pmatrix} + \frac{1}{d}\begin{pmatrix}3 & 9 & -21\\-1 & -3 & 7\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

avec $b\in\mathbb{C}$ et $d\in\mathbb{C}^*$.

24. $R^4=J_3^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ et $R^6=J_3^3=0_n$. R serait donc nilpotente, mais d'indice strictement supérieur à 4, ce qui est impossible. $\boxed{\text{L'équation n'a pas de solution.}}$

---

25. De même, $R^{2p-2}=V^{p-1}\neq 0$ et $R^{2p}=V^p=0$ donc R nilpotente d'indice $q\geqslant 2p-1$ et donc $2p-1\leqslant q\leqslant n$. Ainsi, $\boxed{\text{si } n<2p-1\text{, il n'y a pas de solution.}}$

---

26. Soit $n\geqslant 3$. $\boxed{J=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&&&&\vdots\\1&\ddots&\ddots&&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&1&0&0\end{pmatrix}\text{ est nilpotente d'indice } p=n-1\geqslant 2 \text{ et admet } J_n \text{ comme racine carrée.}}$

2. Deuxième partie

A. Réduction des matrices nilpotentes

27. Comme u commute avec lui-même, $\operatorname{Im} u$ est stable par u.
Soit $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$.
Si $y\in\operatorname{Im} u$, on a $x\in E$ tel que $y=u(x)$. Alors $\tilde{u}^{p-1}(y)=u^p(x)=0$ et on a $x\in E$ tel que $u^{p-1}(x)\neq 0_E$, alors $\tilde{u}^{p-2}(u(x))=u^{p-1}(x)\neq 0_E$ donc $\boxed{\tilde{u}\text{ est nilpotent d'indice } p-1.}$

---

28. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u\big(u^k(x)\big)=u^{k+1}(x)\in C_u(x)$ donc $\boxed{C_u(x)\text{ est stable par } u.}$
L'ensemble $\{k\in\mathbb{N},\ u^k(x)=0\}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ (car $x\neq 0_E$), non vide car contenant p, donc $\boxed{\text{admet un plus petit élément } s(x)\geqslant 1}$.

---

29. On a déjà, pour tout $k\in[\![0,s(x)-1]\!]$, $u^k(x)\in C_u(x)$.
Puis, si $k\in\mathbb{N}$, comme $u^{s(x)}(x)=0$, par division euclidienne de k par $s(x)$ de reste $r\in[\![0,s(x)-1]\!]$, $u^k(x)=u^r(x)\in\operatorname{Vect}\big(x,u(x),\dots,u^{s(x)-1}(x)\big)$.
Donc $\big(x,u(x),\dots,u^{s(x)-1}(x)\big)$ engendre $C_u(x)$.
Reste à montrer que la famille est libre.
Or si on a des complexes $\lambda_1,\dots,\lambda_{s(x)-1}$ tels que $\lambda_1 x+\cdots+\lambda_{s(x)-1}u^{s(x)-1}(x)=0_E$, alors on montre que tous les λ_k sont nuls exactement comme dans la question 3 car $u^{s(x)}(x)=0_E$.
Finalement, $\boxed{\big(x,u(x),\dots,u^{s(x)-1}(x)\big)\text{ est une base } C_u(x).}$

---

30. Soit H_p l'hypothèse $\boxed{\text{« Si } u \text{ nilpotent d'indice } p \text{ sur un espace vectoriel } E\text{, alors } \exists\, x_1,\dots,x_t\in E,\ \ E=\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)\text{. »}}$
On raisonne par récurrence sur $p\geqslant 2$.

Initialisation : Si u est nilpotent d'indice 2,

- Soit $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ et la base de la question 8. donne directement $E = \bigoplus_{i=1}^{r} C_u(e_i)$.
- Soit $\operatorname{Im} u \neq \operatorname{Ker} u$ et la base de la question 10. donne directement $E = \bigoplus_{i=1}^{r} C_u(e_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2r} C_u(v_i)$.

(Remarquons que c'est déjà vrai pour $p = 1$ car alors n'importe quelle base $(x_1, \dots, x_n)$ de E convient.)

Hérédité : Soit un $p \geqslant 3$ fixé pour lequel H_{p-1} est vraie.

Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. On a vu à la question 27 que $\operatorname{Im} u$ est stable par u et que l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $\operatorname{Im} u$ est nilpotent d'indice $p-1$.

On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : on a $y_1, \dots, y_t \in \operatorname{Im} u$ tels que $\operatorname{Im} u = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i)$.

Pour chaque $i \in [\![1, t]\!]$, on a $x_i \in E$ tel que $y_i = u(x_i)$.
Et vu la somme directe précédente, la famille $\left(u^{s(x_i)-1}(x_i)\right)_{1 \leqslant i \leqslant t}$ forme une famille libre de $\operatorname{Ker} u$. On peut donc la compléter avec des vecteurs $v_1, \dots, v_{n-r-t}$ en une base de $\operatorname{Ker} u$ où $r = \operatorname{rg} u$.
On montre alors que la famille $\left(x_1, y_1, \dots, u^{s(y_1)-1}(y_1), \dots, x_t, y_t, \dots, u^{s(y_t)-1}(y_t), v_1, \dots, v_{n-r-t}\right)$ est une base de E sur le même principe que la question 10. En effet elle contient $t + \sum_{i=1}^{t} s(x_i) + (n-r-t) = t + r + (n-r-t) = n = \dim E$ vecteurs et si on a une combinaison linéaire nulle, en composant par u et utilisant le fait que $y_i = u(x_i)$, on obtient une combinaison linéaire nulle des $y_1, \dots, u^{s(y_1)-1}(y_1), \dots, y_t, \dots, u^{s(y_t)-1}(y_t)$ dont tous les cœfficients sont nuls vu la somme directe ci-dessus et la base de la question précédente.
Reste alors une combinaison linéaire nulle de $u^{s(y_1)-1}(y_1), \dots, u^{s(y_t)-1}(y_t), v_1, \dots, v_{n-r-t}$ dont tous les cœfficients sont nuls car on a une base de $\operatorname{Ker} u$.
Finalement, en remarquant que pour tout i, $\operatorname{Vect}\left(x_i, y_i, \dots, u^{s(y_i)-1}(y_i)\right) = C_u(x_i)$ (avec $s(x_i) = s(y_i) + 1$), et pour tout j, $\operatorname{Vect}(v_j) = C_u(v_j)$, on obtient $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-r-t} C_u(v_i)$, ce qui établit la récurrence.

31. Dans une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice de u est diagonale par blocs car les sous-espaces sont stables. Et vu les bases prises sur chaque $C_u(x_i)$, on obtient $\boxed{\operatorname{diag}\left(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_t)}\right).}$

B. Partitions d'entiers

32. Vu la question précédente, quitte à réordonner $s(x_1), \dots, s(x_t)$ par ordre décroissant, on a bien $\boxed{\text{une partition } \sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \text{ de } n = \dim E \text{ et une base de } E \text{ dans laquelle la matrice est } \operatorname{diag}\left(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k}\right)}$ avec $k = t$.

33. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à J_α, alors $u : (x_1, \dots, x_\alpha) \mapsto (0, x_1, \dots, x_{\alpha-1})$.

Donc si $j \leqslant \alpha$, $u^j : (x_1, \dots, x_\alpha) \mapsto (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_{\alpha-j})$ a comme image $\{0\}^j \times \mathbb{C}^{\alpha-j}$ et donc $\boxed{\operatorname{rg} J_\alpha^j = \alpha - j \text{ si } j < \alpha, 0 \text{ sinon.}}$

Et donc, $J_\alpha^{\alpha-1} \neq 0$ et $J_\alpha^\alpha = 0$ donc $\boxed{J_\alpha \text{ est nilpotente d'indice } \alpha.}$

34. On a ici N_σ nilpotent d'indice p. Donc, par un calcul par bloc, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, J_{α_i} est nilpotente d'indice au plus p et l'une au moins est d'indice p. Mais comme les J_{α_i} sont nilpotentes d'indice α_i et que les α_i sont rangés par ordre décroissant, $\boxed{\alpha_1 = p.}$

35. On a par blocs, $N_\sigma^j = \operatorname{diag}\left(J_{\alpha_1}^j, \dots, J_{\alpha_k}^j\right)$ et comme la matrice est diagonale par blocs, $\operatorname{rg} N_\sigma^j = \sum_{i=1}^k \operatorname{rg} J_{\alpha_i}^j$.

Mais si $j > \alpha_i$, $\operatorname{rg} J_{\alpha_i}^j = 0$ et sinon, $\operatorname{rg} J_{\alpha_i}^j = \alpha_i - j$. Donc finalement, $\boxed{\operatorname{rg} N_\sigma^j = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j).}$

---

36. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Alors $d_j = \operatorname{rg} N_\sigma^{j-1} - \operatorname{rg} N_\sigma^j = \sum_{i \in \Lambda_{j-1}} (\alpha_i - j + 1) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j)$.

Or $\Lambda_{j-1} = \Lambda_j \cup \{i \in [\![1, k]\!],\ \alpha_i = j - 1\}$, donc $d_j = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j + 1) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j) = \sum_{i \in \Lambda_j} 1 = |\Lambda_j|$.

$\boxed{d_j \text{ est donc bien le nombre de blocs } J_{\alpha_i} \text{ dont la taille } \alpha_i \geqslant j.}$

---

37. k est le nombre de blocs J_{α_i} dont la taille $\alpha_i \geqslant 1$, il s'agit donc de $\boxed{d_1 = \operatorname{rg} \mathrm{id}_E - \operatorname{rg} u = n - r.}$

---

38. Soit $1 \leqslant j \leqslant n$. Le nombre de blocs de taille j est $\boxed{d_j - d_{j+1} = \operatorname{rg} u^{j-1} - 2 \operatorname{rg} u^j + \operatorname{rg} u^{j+1}.}$

---

39. Le nombre de blocs d'une taille donnée étant uniquement déterminé par u vu la question précédente, et l'unicité de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ imposé par leur ordre décroissant dans la définition d'une partition font que $\boxed{\sigma = \sigma'.}$

---

40. Les partitions de n déterminent donc les classes de similitudes des matrices nilpotentes.
Un ensemble de matrices nilpotentes de taille n qui ne contiennent pas deux matrices semblables est donc taille au plus $\boxed{\text{le nombre } |\Gamma_n| \text{ de partitions de } n.}$

C. Applications

41. On calcule (par exemple à la calculatrice) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_5$.

Donc $\operatorname{rg} u^0 = 5$, $\operatorname{rg} u^1 = r = 3$, $\operatorname{rg} u^2 = 1$, $\operatorname{rg} u^3 = 0$ et $p = 3$. Et ainsi, $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$ et $d_4 = 0$.
Donc $k = n - r = 2$, le nombre de blocs de taille 1 est $d_1 - d_2 = 0$, le nombre de blocs de taille 2 est $d_2 - d_3 = 1$, le nombre de blocs de taille 3 est $d_3 - d_4 = 1$.

$$\boxed{\text{La partition de 5 associée est donc } \sigma(3,2) \text{ et } N_\sigma = \operatorname{diag}(J_3, J_2) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & & \\ \hdashline & \mathbf{0} & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right).}$$

---

42. On remarque déjà que si M est nilpotente, alors $2M$ et $M^\top$ sont nilpotentes de même indice p.

Ensuite, en écrivant $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$, on a aussi $E = \bigoplus_{i=1}^t C_{2u}(x_i)$ car $C_u(x) = \operatorname{Vect}\left(u^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}} = \operatorname{Vect}\left(2^k u^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}} = C_{2u}(x)$.

Cette décomposition donnant la matrice N_σ dans la question 32, on en déduit que $\boxed{M \text{ et } 2M \text{ sont semblables.}}$

Pour passer de M à $M^\intercal$ avec cette même décomposition, il suffit de prendre les vecteurs des bases des $C_u(x_i)$ dans l'ordre inverse, ce qui permet d'obtenir que $\boxed{M \text{ et } M^\intercal \text{ sont semblables.}}$

En réalité, même si ce n'est pas l'esprit de la question dans le sujet, il y a plus simple.
En effet, pour tout j, $\operatorname{rg} M^j = \operatorname{rg}\left(M^j\right)^\intercal = \operatorname{rg}(M^\intercal)^j$ et $\operatorname{rg}(2M)^j = \operatorname{rg} 2^j M^j = \operatorname{rg} M^j$ donc les questions 36 à 39 permettent de montrer que M, $M^\intercal$ et $2M$ sont semblables à la même matrice N_σ et donc sont deux à deux semblables.

43. Si M et $2M$ sont semblables, elles ont même spectre.
Or si $\lambda \in \operatorname{Sp} M$, $2\lambda \in \operatorname{Sp} 2M = \operatorname{Sp} M$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n\lambda \in \operatorname{Sp} M$. Comme $\operatorname{Sp} M$ est fini, la seule possibilité est $\lambda \neq 0$. Comme on est dans $\mathbb{C}$, $\operatorname{Sp} M \neq \varnothing$ et donc $\operatorname{Sp} M = \{0\}$.

D'après la question 15, $\boxed{M \text{ est nilpotente.}}$

D. Un algorithme de calcul du nombre de partitions de n

44. $y_{n,1}$ est le nombre de partitions de n dont le premier terme $\alpha_1 \leqslant 1$. La seule partition répondant à cette contrainte est $(1, 1, \dots, 1)$ donc $\boxed{y_{n,1} = 1.}$

45. Les partitions de n se séparent en deux catégories disjointes : celles qui commencent par un nombre inférieur ou égal à $n-1$ et l'unique partition (n) commençant par n.

Ainsi $y_{n,n} = y_{n,n-1} + 1 = y_{n,n-1} + y_{0,0} = y_{n,n-1} + y_{n,\min(0,n)}$. $\boxed{\text{L'égalité est vraie pour } j = n.}$

46. Pour $j < n$, les partitions de n commençant par un nombre inférieur ou égal à j se séparent en deux catégories disjointes : celles qui commencent par un nombre inférieur ou égal à $j-1$ et celles dont $\alpha_1 = j$ qui donnent $n = j + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ soit $n - j = \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ avec $\alpha_2 \leqslant \alpha_1 = j$.

On a donc bien $\boxed{y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}.}$

Enfin, si $j \geqslant n-j$, dans une telle écriture $n - j = \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ on a nécessairement $\alpha_2 \leqslant n - j \leqslant j$, donc $y_{n-j,j} = y_{n-j,n-j}$.

On a donc bien $\boxed{y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}.}$

47.

$j \backslash n$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	2	2	3	3
3	0	0	3	4	5
4	0	0	0	5	6
5	0	0	0	0	7

48. La première idée serait d'écrire une fonction récursive. elle est très mauvaise : la complexité explose par des appels multiples. Cependant, tous les points auraient sans doute été donnés au concours.

```python
def nombre_partitions(n):
    def y(n, j):
        if (n, j) == (0, 0):
            return 1
        if not (1 <= j <=  n):
            return 0
        return y(n, j - 1) + y(n - j, min(j, n - j))
    return y(n, n)
```

Il est préférable de faire de la programmation dynamique avec de la mémoïsation : on calcule les termes au fur et à mesure en les stockant dans un tableau pour ne pas avoir à les recalculer.

```python
def nombre_partitions(n):
    y = [[0 for j in range(n + 1)] for m in range(n + 1)]
    y[0][0] = 1
    for j in range(1, n + 1):
        for m in range(j, n + 1): # y[m][j] = 0 si j > m
            y[m][j] = y[m][j - 1] + y[m - j][min(j, m - j)]
    return y[n][n]
```

Ce qui qui s'écrit aussi récursivement.

```python
def nombre_partitions(n):
    y = [[None for j in range(n + 1)] for m in range(n + 1)]
    def remplir(n, j):
        if y[n][j] is None:
            if (n, j) == (0, 0):
                y[0][0] = 1
            elif not (1 <= j <= n):
                y[n][j] = 0
            else:
                remplir(n, j - 1)
                remplir(n - j, min(j, n - j))
                y[n][j] = y[n][j - 1] + y[n - j][min(j, n - j)]
    remplir(n, n)
    return y[n][n]
```

49. Pour $n = 5$, $|\Gamma_5| = y_{5,5} = 7$ est le nombre maximal de matrices nilpotentes d'ordre 5 qui ne sont pas semblables deux à deux.

Il suffit de prendre les N_σ pour $\sigma \in \Gamma_5$.

Or $\Gamma_5 = \{(1,1,1,1,1), (2,1,1,1), (2,2,1), (3,1,1), (3,2), (4,1), (5)\}$.

Il s'agit donc des matrices $N_{(1,1,1,1,1)} = 0_5$, $N_{(2,1,1,1)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $N_{(2,2,1)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $N_{(3,1,1)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $N_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$, $N_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $N_{(5)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

Fin