CCP 2013. Option MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

PROBLÈME

1)

a) Si $a \in T_1(\mathbb{R})$ en particulier il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = a$ donc $a \geqslant 0$. Réciproquement si $a \geqslant 0$ alors, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $b^n = a$ avec $b = \sqrt[n]{a}$. Donc $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$. $\square$

b) $\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\theta_k} \right\}_{k=0..n-1}$ avec $\theta_k = \dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}$. $\square$

c) 0 est évidemment TP$\mathbb{C}$ ainsi que tout complexe non nul par la question précédente. Donc $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. $\square$

2)

a) Si $A \in T_p(\mathbb{K})$, pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$.
Il en découle que $\det A = \Big(\det B\Big)^n$ donc que $\det A \in T_1(\mathbb{K})$ puisque $\det B \in \mathbb{K}$. $\square$

b) Il en résulte par exemple que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin T_2(\mathbb{R})$, d'après la question 1)a), puisque $\det A < 0$. $\square$

3) Cette condition nécessaire n'est pas suffisante car la matrice A proposée est bien à déterminant positif mais n'est pas toute puissante.
En effet s'il existait une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, on aurait (avec les notations de l'énoncé) :

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 & (1) \\ d^2 + bc = -2 & (2) \\ b(a+d) = 0 & (3) \\ c(a+d) = 0 & (4) \end{cases}$$

(1) implique que b et c sont non nuls.
(3) et (4) impliquent alors que $a + d = 0$ donc $a^2 = d^2$.
Les équations (1) et (2) sont alors incompatibles. $\square$

4)

a) En remplaçant la première colonne $C1$ du determinant caractéristique par $C1 + C3$ on peut factoriser par $\lambda - 2$.
Puis en remplaçant la troisième ligne $L3$ par $L3 - L1$ on se ramène à un déterminant d'ordre 2.
Il vient ainsi que $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$.
Il en découle que A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_2 = 2$.
Or le système $AX = 2X$ se réduit à $2x - 3y - 2z = 0$ donc E_2 est le plan engendré par exemple par $\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2} = (0, 2, -3)$ et A est bien diagonalisable. $\square$

b) Un calcul immédiat prouve que la droite E_1 est engendrée par $\overrightarrow{\varepsilon_3} = (1, 1, -1)$.
Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base diagonalisante $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3})$ et $D = \mathrm{diag}(2, 2, 1)$ de sorte que $A = PDP^{-1}$.
Pour $n \geqslant 1$ soit $B_n = PD_nP^{-1}$ avec $D_n = \mathrm{diag}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}, 1)$. Alors $B_n^n = A$ donc A est TP$\mathbb{R}$. $\square$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. La calculatrice fournit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ainsi que

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & -3 + 3\sqrt{2} & -2 + 2\sqrt{2} \\ 2 - 2\sqrt{2} & -3 + 4\sqrt{2} & -2 + 2\sqrt{2} \\ -2 + 2\sqrt{2} & 3 - 3\sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } B_3 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt[3]{2} & -3 + 3\sqrt[3]{2} & -2 + 2\sqrt[3]{2} \\ 2 - 2\sqrt[3]{2} & -3 + 4\sqrt[3]{2} & -2 + 2\sqrt[3]{2} \\ -2 + 2\sqrt[3]{2} & 3 - 3\sqrt[3]{2} & 2 - \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

5) A est est la matrice de l'homothétie de rapport -1 donc de la rotation d'angle π. De sorte que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_n^n = A$ avec $B_n = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{n} & -\sin\dfrac{\pi}{n} \\ \sin\dfrac{\pi}{n} & \cos\dfrac{\pi}{n} \end{pmatrix}$ et A est TP$\mathbb{R}$. $\square$

6) Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ nilpotente.

a) Il existe $r \geqslant 1$ tel que $N^r = 0$ donc X^r annule N de sorte que 0 est la seule valeur propre de N. Ainsi $\chi_N = X^p$ et $N^p = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton. $\square$

b) Si N est TP$\mathbb{K}$, en particulier il existe B telle que $B^p = N$ donc $B^{p^2} = N^p = 0$ de sorte que B est nipotente et donc $B^p = 0$ i.e. $N = 0$. $\square$

7) Comme les λ_i pour i de 1 à k sont deux à deux distincts, les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$ sont premiers entre eux deux à deux et le théorème de décomposition des noyaux joint au théorème de Cayley-Hamilton fournit la décomposition cherchée. $\square$

8)

a) Si v commute avec u alors v commute avec $Q(u)$ donc $\operatorname{Ker} Q(u)$ est stable par v. $\square$

b) u commute avec $u - \lambda_i \mathrm{id}$ et en appliquant la question précédente (avec $v = u$, $u = u - \lambda_i \mathrm{id}$ et $Q = X^{r_i}$), il vient que C_i est stable par u. $\square$

9) Comme C_i est stable par u donc par $u - \lambda_i \mathrm{id}$, il vient pour tout $\overrightarrow{x} \in C_i$:
$(u_{C_i} - \lambda_i \mathrm{id}_{C_i})^{r_i}(\overrightarrow{x}) = (u - \lambda_i \mathrm{id})^{r_i}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$. $\square$

10) Ainsi $u_{C_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{C_i} + v_i$ où v_i est un endomorphisme nilpotent de C_i.
Dans toute base de C_i la matrice de u_i est donc de la forme $A'_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{p_i} + N_i$ avec N_i nilpotente.
La matrice de u dans toute base adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k$ est donc $A' = \mathrm{diag}(A'_1, A'_2, \ldots, A'_k)$ qui est bien de la forme demandée. $\square$

11) Supposons A'_i TP$\mathbb{K}$ pour tout i de 1 à k et soit $n \geqslant 1$ un entier quelconque.
Pour tout i, il existe $B'_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ telle que $(B'_i)^n = A'_i$.
Alors $(B')^n = A'$ par calcul par blocs avec $B' = \mathrm{diag}(B'_1, B'_2, \ldots, B'_n)$ donc $B^n = A$ avec $B = PB'P^{-1}$.
Ainsi A est bien TP$\mathbb{K}$. $\square$

12)

a) Si V est le polynôme nul on a bien $V = X^p Q$ avec Q le polynôme nul.
Sinon notons k la valuation de V : $V = a_k X^k + a_{k+1} X^{k+1} + \ldots + a_m X^m$ avec $a_k \neq 0$. Alors $V(x) \sim a_k x^k$ au voisinage de 0 de sorte que $x^k = o(x^p)$ ce qui entraîne $k > p$. Il en découle que X^p divise V. $\square$

b) Notons $U(x) = 1 + \dfrac{1}{n}x + \ldots + \dfrac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)\ldots(\frac{1}{n}-p+1)}{p!}x^p$ de sorte que $(1+x)^{1/n} = U(x) + o(x^p)$.
Il vient alors $1 + x = \Big(U(x) + o(x^p)\Big)^n = U(x)^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\, U(x)^{n-k} o(x^{kp})$
Or $U(x) \sim 1$ donc $U(x)^{n-k} o(x^{kp}) = o(x^{kp}) = o(x^p)$ pour k de 1 à n de sorte que $1 + x = U(x)^n + o(x^p)$ $\square$

c) Résulte immédiatement de a) et du fait que $1 + X - U(X)^n$ est un polynôme. $\square$

13)

a) Soit $n \geqslant 1$ un entier quelconque. Avec les notations de la question précédente : $(1+X)(N) = U(N)^n + N^p Q(N)$ par le classique morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Or $N^p = 0$ par la question 6)a).
Ainsi $\mathrm{Id} + N = U(N)^n$ donc $\mathrm{Id} + N$ est TP$\mathbb{K}$. $\square$

b) Soit λ non nul. Il vient $\lambda \mathrm{Id}_p + N = \lambda\big(\mathrm{Id}_p + N'\big)$ avec $N' = \dfrac{1}{\lambda} N$ clairement nilpotente.
Par la question précédente, il existe $B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $(B')^n = \mathrm{Id}_p + N'$.
Si λ est en outre TP$\mathbb{K}$, il existe λ' tel que $(\lambda')^n = \lambda$ et $B^n = \lambda \mathrm{Id}_p + N$ avec $B = \lambda' B'$ et $\lambda \mathrm{Id}_p + N$ est TP$\mathbb{K}$. $\square$

14)

a) Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ alors, par la question 10), A est semblable à une matrice $B = \mathrm{diag}(A'_1, A'_2, \ldots, A'_k)$ avec $A'_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{p_i} + N_i$ où les matrices N_i sont nilpotentes et $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ est l'ensemble des valeurs propres de A.
Si $A \in GL_p(\mathbb{C})$, $\lambda_i \neq 0$ donc λ_i est TP$\mathbb{C}$ (question 1c) donc A'_i est TP$\mathbb{C}$ par la question précédente.
La question 11) prouve alors que A est TP$\mathbb{C}$ $\square$

b) La question 6)b) prouve qu'une matrice nilpotente non nulle n'est pas TP$\mathbb{C}$. $\square$

15) Exemple 1 :

Soit la matrice d'ordre 4 diagonale par bloc d'ordre 2 : $A = \mathrm{diag}\big(R, (0)\big)$ où $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Le polynôme caractéristique de A est (matrice triangulaire) $X^2(X^2+1)$ donc A est non inversible (0 est valeur propre) et non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (polynôme caractéristique non scindé sur $\mathbb{R}$).
Cependant A est TP$\mathbb{R}$ car, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_n^n = A$ avec $B_n = \mathrm{diag}\big(R_n, (0)\big)$ où R_n est la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2n}$: $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2n}) & -\sin(\frac{\pi}{2n}) \\ \sin(\frac{\pi}{2n}) & \cos(\frac{\pi}{2n}) \end{pmatrix}$ $\square$

Exemple 2 où A n'est même pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (elle l'est dans l'exemple précédent) :
Remplaçons dans l'exemple précédent R par la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Le spectre de A est $(1, 1, 0, 0)$ mais le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par $\overrightarrow{e_1}$ ce qui prouve que A est non inversible et non $\mathbb{C}$-diagonalisable.
Or $S = \mathrm{Id}_2 + N$ avec N nilpotente car $N^2 = 0$. Par la question 13)b), il existe $S_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S_n^n = S$. Alors $B_n^n = A$ avec $B_n = \mathrm{diag}\big(S_n, (0)\big)$ $\square$

FIN