Programme de colle – MP 1

1. Révisions

Révision du programme de MPSI : calculs de primitives, intégrales sur un segment des fonctions numériques. Voir programme officiel page suivante.

2. Fonctions vectorielles

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. ⇆ PC : vitesse instantanée. Traduction par les coordonnées dans une base de E.
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L\circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire. Cas du produit scalaire.	⇆ PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.
Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	⇆ PC et SI : vecteur accélération.
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E.	Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. ⇆ PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Inégalité $\left\Vert\int_a^b f\right\Vert \leqslant \int_a^b \Vert f\Vert$. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
f) Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).
g) Arcs paramétrés	
Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans E. Paramètre régulier. Exemples simples d'arcs paramétrés plans.	Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier. Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier. L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme. La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme. ⇆ I : réalisation de tracés à l'aide de l'outil informatique.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Dérivation de $u\circ f$ si u est linéaire, de $B(f,g)$ si B est bilinéaire.

(ii) Formule de Leibniz avec une fonction bilinéaire.

(iii) L'intégrale d'une fonction vectorielle ne dépend pas de la base de l'espace vectoriel.

(iv) Un calcul de primitive de la forme $\dfrac{ax+b}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ avec $\beta^2<4\alpha\gamma$.

(v) Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.

(vi) Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

(vii) Primitivation d'un développement limité, d'où la formule de Taylor-Young.

(viii) **CCINP 3** :

(a) On pose $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

(b) On pose $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

(c) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

(ix) **CCINP 4** :

(a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

(b) Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et soit $x_0\in\,]a,b[$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

(c) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.

(x) **CCINP 56** : On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

(a) Montrer que H est C^1 sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

(b) Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.

(c) En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

3. Programme de MPSI

A. Calcul de primitives

Contenus	Capacités & commentaires
Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$. $\leftrightarrows$ PC et SI : cinématique.
Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme, $$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $$x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue.	Résultat admis à ce stade.
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	
Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$	On définit à cette occasion la classe $\mathscr{C}^1$. Application au calcul de primitives.

B. Intégrale sur un segment

Contenus	Capacités & commentaires
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique. $\leftrightarrows$ PC et SI : valeur moyenne. Aucune difficulté théorique relative à la notion d'aire ne doit être soulevée. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité : $\left\lvert\int_{[a,b]} f\right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert$.	Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.

Contenus	Capacités & Commentaires
L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.	
d) Sommes de Riemann	
Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$. $\leftrightarrows$ I : méthodes des rectangles, des trapèzes.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Intégration par parties, changement de variable.	
f) Calcul de primitives	
Primitives usuelles.	Sont exigibles les seules primitives mentionnées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ».
Calcul de primitives par intégration par parties, par changement de variable.	
Utilisation de la décomposition en éléments simples pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle.	On évitera tout excès de technicité.
g) Formules de Taylor	
Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	
Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On soulignera la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).